

Universidade Federal do Espírito Santo

Modelos de matéria e energia escuras alternativos ao cenário padrão.

por

Carlos Eduardo M. Batista

Tese de Doutorado

Orientador: Dr. Júlio César Fabris

Vitória - Espírito Santo

ram. À minha família por todo apoio e amor que me de-

Agradecimento

- À minha esposa Carla por todo apoio, amor e dedicação que me deu em todos os momentos.
- Ao meu pai que sempre esteve ao meu lado durante toda a minha vida.
- A todos os meus amigos da pós graduação que direta ou indiretamente me ajudaram na realização desta tese.
- Aos professores do grupo de cosmologia e gravitação da U.F.E.S.
- Ao meu coorientador Dr. Winfried por ter estado sempre presente e atencioso.
- Ao meu orientador Dr. Júlio César Fabris que sempre me incentivou, e pela paciência que sempre teve.

Resumo

Nesta tese investigamos como o TeVeS se comporta quando a razão entre a densidade de energia ρ_2 e ρ_1 é constante no referencial de Einstein, onde $\rho_2 + \rho_1 = \rho_{ef}$ é a densidade de energia efetiva no referencial de Einstein. Verificamos que o TeVeS é capaz de geometrizar a matéria escura no referencial físico, eliminando desta forma a matéria escura. Em seguida realizamos procedimento semelhante nas teorias escalares tensoriais, ao mantermos a razão entre a densidade de energia da matéria e a densidade de energia do campo constantes no referencial de Einstein. O resultado prediz a existência de uma energia escura geometrizada e, portanto não é necessário uma nova forma de energia permeando o universo a fim de explicar a aceleração do universo. A terceira parte trata da possibilidade da existência de densidade de energia negativa no universo. O nosso modelo, que inclui uma constante cosmológica e um campo escalar, é confrontado com dados de supernovas tipo Ia e de 2dFGRS. O resultado prediz que é possível existir densidade de energia negativa tanto para o campo escalar quanto para a constante cosmológica, porém não permite densidade de energia negativa para a matéria.

Abstract

In this tese we investigate the behavior of TeVeS when the the ratio between the enegy densities ρ_2 and ρ_1 is constant in the Einstein frame, where $\rho_2 + \rho_1 = \rho_{ef}$ is the energy density efective in the Einstein frame. We have verified TeVeS can geometrize the dark matter in the physical frame, eliminating the dark matter. Then we used a similar procedure in the case of scalar-tensor theories, preserving the ratio constant between the matter energy density and the field energy density in the Einstein frame. The result predict the existence of geometrized dark energy , then it is not necessary a new kind of energy filling the universe to describe the universe acelARATION. The third part deal with the possibility of negative energy density filling the universe. Our model with cosmological constant and sclar field is compared with supernovas types Ia and to the 2dFGRS data. The result show that it is possilble to exist negative energy density for the scalar field as well as for the cosmological constant, but it does not allow negative energy density for the matter.

Sumário

1	INTRODUÇÃO GERAL	3
2	MATÉRIA ESCURA E ENERGIA ESCURA	5
2.1	MATÉRIA ESCURA	5
2.1.1	INTRODUÇÃO	5
2.1.2	MATÉRIA ESCURA EM GALÁXIAS	7
2.1.3	MATÉRIA ESCURA EM AGLOMERADOS DE GALÁXIAS	12
2.1.4	FORMAÇÃO DE ESTRUTURAS	13
2.2	ENERGIA ESCURA	21
2.2.1	Λ CDM	22
2.2.2	QUINTESSÊNCIA	24
2.2.3	K-ESSÊNCIA	26
2.2.4	CAMPO FANTASMA	27
2.2.5	GÁS DE CHAPLYGIN	29
2.2.6	MODELO BRANAS	31
3	TEORIA ALTERNATIVA DE GRAVITAÇÃO	33
3.1	PARADIGMA MOND	33
3.2	AQUAL	36
3.3	TEORIAS RELATIVÍSTICAS	38
3.3.1	REQUISITOS PARA UMA TEORIA RELATIVÍSTICA TIPO MOND	38
3.3.2	REFERENCIAL DE JORDAN E REFERENCIAL DE EINSTEIN	39
3.4	RAQUAL	41
3.5	PCG	42
3.6	TEORIAS COM TRANSFORMAÇÃO DISFORME	42
3.7	TEVES	43

3.7.1	FUNDAMENTOS DO TEVES:	45
3.7.2	EQUAÇÕES COSMOLÓGICAS DO TEVES	57
4	SOLUÇÃO DE POTÊNCIAS NO TeVeS	63
4.1	INTRODUÇÃO	63
4.2	DESCRIÇÃO ALTERNATIVA DE DUAS COMPONENTES	64
4.2.1	DENSIDADE DE ENERGIA E PRESSÃO NO REFERENCIAL DE EINSTEIN	72
4.3	IMPLICAÇÕES DA FUNÇÃO F	73
4.4	DINÂMICA NO REFERENCIAL DE JORDAN	75
4.5	PARÂMETRO DESACELERAÇÃO	79
4.6	MEIO CÓSMICO	81
4.7	DISCUSSÃO	84
5	SOLUÇÕES DE POTÊNCIA E EXPANSÃO ACELERADA EM TEO- RIAS ESCALARES TENSORIAIS	85
5.1	INTRODUÇÃO	85
5.2	DINÂMICA BÁSICA	86
5.3	DESCRIÇÃO DE DUAS COMPONENTES	88
5.4	SOLUÇÕES NO REFERENCIAL DE JORDAN	94
5.5	O MEIO CÓSMICO	99
5.6	OBSERVAÇÕES	102
5.7	CONCLUSÃO	104
6	ENERGIA NEGATIVA	106
6.1	INTRODUÇÃO	106
6.2	DOIS FLUIDOS SEM PRESSÃO	107
6.3	INCLUINDO A CONSTANTE COSMOLÓGICA	110
6.4	EQUAÇÕES PERTURBADAS NO CALIBRE SÍNCRONO	111
6.5	ANÁLISE DO ESPECTRO DE POTÊNCIA E DADOS DE SNIA	114
6.6	DISCUSSÃO	119
7	CONCLUSÃO	121
8	APÊNDICE	123
8.1	TEOREMA VIRIAL	123

Capítulo 1

INTRODUÇÃO GERAL

A primeira teoria séria de gravitação foi proposta por Newton, e no início do século passado, Einstein propôs a relatividade geral. A teoria obteve grande sucesso por estar em acordo com vários experimentos. Vários outros modelos surgiram nos últimos 100 anos a fim de generalizar a relatividade geral ou até mesmo confrontá-la. O modelo padrão Λ CDM consiste em adicionar uma constante cosmológica à equação de Einstein original. O modelo é de grande aceitação, pois é capaz de prever a aceleração do universo a partir de um efeito antigravitacional promovido pela constante cosmológica. A constante cosmológica é responsável por uma força repulsiva proporcional à distância [1] ao contrário da gravitacional e, por isso é capaz de acelerar o universo. Segundo dados da anisotropia da radiação de fundo e de supernovas tipo Ia, a matéria contribui com $\Omega_m = 0.25$, e a energia escura com $\Omega_\Lambda = 0.75$. Apesar de suas vantagens, o modelo apresenta também pontos fracos, como por exemplo, o valor predito para a constante cosmológica é cerca de 10^{123} vezes o valor observado $\frac{\Lambda}{8\pi G} \approx 10^{-47} GeV^4$. Um valor pequeno de Λ garante que o universo começou a acelerar recentemente, dando origem ao problema da coincidência. Além do mais uma quantidade de matéria escura fria (CDM) nunca foi detectada.

Teorias mais gerais que a relatividade geral podem se apresentar na forma de teorias escalares tensoriais. O modelo inicial dessas classes de teorias é a teoria de Brans-Dicke. As teorias $f(R)$, que podem ser reformuladas em uma teoria escalar tensorial através da relação $\phi = \frac{df(R)}{dR}$, podem explicar a aceleração do universo. A relatividade geral seria um caso particular em que $f(R) = R$. Mostraremos que as teorias escalares tensoriais podem explicar a aceleração do universo a partir de uma modificação da gravidade ao invés de se introduzir uma nova forma de energia.

Um dos problemas da cosmologia diz respeito às curvas planas de rotação de galáxias.

É observado que na região exterior da galáxia, a velocidade das estrelas são praticamente as mesmas. Isto não está em acordo com o modelo que se baseia na dinâmica Newtoniana e somente na matéria visível. Neste modelo as estrelas mais afastadas devem possuir velocidade menor do que as estrelas mais próximas do centro galático, o que está em contradição com a observação. A dinâmica Newtoniana é capaz de explicar a existência de curvas planas de rotação de galáxias através da introdução de uma quantidade de matéria misteriosa denominada matéria escura. A matéria escura também é capaz de explicar as observadas lentes gravitacionais. Ela poderia compreender neutrinos massivos, áxions, neutralinos etc. Entretanto, nada até o momento foi detectado. Uma alternativa seria modificar a dinâmica Newtoniana e não introduzir matéria escura. Milgrom, no início dos anos 80 propôs um modelo denominado MOND. O modelo é capaz de prever as curvas planas de rotação de galáxias sem introduzir matéria escura. Entretanto, o MOND não é um modelo relativístico e, portanto não pode prever desvios da luz.

Em 2004 [2], Bekenstein apresenta uma teoria mais complexa que as escalares tensoriais. Trata-se de uma teoria relativística que se reduz no seu limite não relativístico à dinâmica Newtoniana quando as acelerações das estrelas nas periferias das galáxias são muito maiores do que $a_0 \approx 10^{-8} \text{ cm/s}^2$, e ao MOND quando as acelerações são bem menores do que a_0 . A teoria, que é chamada TeVeS e significa Tensor Vector Scalar, possui além do tensor métrico, 2 campos escalares e um vetorial. A teoria também faz previsões corretas a respeito do desvio da luz pelas galáxias, se for levado em conta apenas matéria luminosa. Porém, ela também parece necessitar acrescentar uma quantidade de matéria escura nos aglomerados de galáxias [3].

Nesta tese se tratará de como o TeVeS e as teorias escalares tensoriais se comportam quando a razão entre duas densidades de energia é postulada como sendo constante. No caso do TeVeS, a razão entre $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ é constante, onde ρ_2 e ρ_1 são densidades de energia no referencial de Einstein e são provenientes da equação de Friedmann. No caso das teorias escalares tensoriais, $\frac{\rho_m}{\rho_\phi}$ é constante no referencial de Einstein. ρ_m e ρ_ϕ são a densidade de energia da matéria e do campo escalar respectivamente. Por último se discutirá a possibilidade de existir densidade de energia negativa no setor escuro. Enquanto que os dois primeiros trabalhos estão bem correlacionados, o terceiro pode ser visto como um assunto a parte. A motivação para acreditar que possa existir densidade de energia negativa é devido a questões teóricas e observacionais. Do ponto de vista teórico existem modelos que predizem a existência de densidade de energia negativa, como por exemplo certos modelos que tentam resolver o problema da coincidência [4,5]. Do ponto de vista observacional há indicações de que possa existir densidade de energia negativa. Isto já acontece no modelo Λ CDM.

Capítulo 2

MATÉRIA ESCURA E ENERGIA ESCURA

2.1 MATÉRIA ESCURA

2.1.1 INTRODUÇÃO

Por mais de sete décadas [11] a matéria escura tem sido postulada para explicar as grandes velocidades de partículas (estrelas e gases) na periferia das galáxias (formando uma curva de rotação plana a poucos kiloparsecs do centro, onde $1\text{ps} \approx 3$ anos luz), mantendo para isso a gravitação Newtoniana intacta. A noção de matéria escura vai desde sistemas constituídos por galáxias anãs esferóides com massa aproximadamente de 10^7 massas solares até grandes agrupamentos de galáxias detentoras de massa na faixa de 10^{14} massas solares [2, 12].

De acordo com as medidas de supernovas tipo IA e da anisotropia da radiação de fundo, cerca de $1/3$ da densidade de energia do universo deveria estar na forma de matéria escura e bariônica e os outros $2/3$ em um universo plano seria devido a uma componente pouco conhecida denominada energia escura [4, 25]. Em um universo plano, a contribuição da densidade de energia da matéria bariônica seria aproximadamente 5% e a da não bariônica 25%. A maior parte da matéria não visível estaria na forma não bariônica. Inicialmente supôs-se que toda matéria escura estaria na forma de neutrinos, entretanto hoje é sabido que isso não seria possível se sua massa estiver em torno de 0.05 eV; neste caso a razão entre a densidade de energia dos neutrinos e a densidade de energia total do universo para curvatura nula é dado por $\Omega_\nu = \frac{\rho_\nu}{\rho_c} \approx 10^{-3}$ [19]. Se a matéria escura fosse composta de neutrinos apenas, a massa dos neutrinos deveria estar em torno de 30 – 70 eV para valores razoáveis

da constante de Hubble. Experimentos realizados por Mains e Troisk [13] mostraram que o limite máximo para a massa dos neutrinos seria de aproximadamente $2.2 - 2.5$ eV. Por este ponto de vista, os neutrinos não poderiam ser a componente dominante da matéria escura. Segundo a referência [19], o universo seria bem diferente do observado caso os neutrinos dominassem a matéria escura.

Historicamente a idéia de matéria escura surgiu em 1933 quando Zwicky [1] percebeu que as velocidades das galáxias individuais dentro do aglomerado de Coma era grande, e este aglomerado só poderia estar gravitacionalmente ligado se a massa total do aglomerado fosse superior à soma das massas das galáxias individuais. Parte da matéria não luminosa nos aglomerados de galáxias estaria em torno das galáxias, região denominada halo, enquanto que outra parte estaria distribuída em outras regiões.

Ao se observar o gráfico da velocidade de uma partícula teste (estrela) em função de sua distância ao centro da galáxia (geralmente espiral), gráfico também chamado de curva de rotação, percebe-se que ao invés da velocidade decair nas regiões onde a luz emitida pela galáxia cessa, ela se torna aproximadamente constante. Isso só poderia ser possível caso fosse postulado a existência de uma componente invisível de matéria, com características diferentes da bariônica. Por exemplo, a massa bariônica é proporcional ao cubo do raio, $m_b(r) \propto r^3$ admitindo densidade constante, enquanto que a massa não bariônica seria proporcional ao raio $m_D(r) \propto r$ a fim de explicar as curvas planas de rotação de galáxias. Não se sabe quase nada a respeito desta componente, e existem modelos que preferem mudar a gravidade e manter apenas a matéria luminosa das galáxias.

A distribuição da matéria escura nas galáxias e nos aglomerados de galáxias é bem diferente [1]. Nas galáxias a matéria escura aumenta proporcionalmente com a distância ao centro. Nos aglomerados de galáxias, a medida do forte desvio da luz por estes aglomerados indica que neles a matéria escura está fortemente concentrada em uma região central de raio aproximadamente igual a 0.2 a 0.3 Mpc. A matéria não luminosa também pode ser composta por matéria bariônica não detectada, já que podem existir estruturas como planetas gigantes e estrelas afastadas que não seriam capazes de emitir quantidade de luz suficiente para serem observadas. Uma característica da matéria escura não bariônica, é que ela não interage com as ondas eletromagnéticas e, por isso não pode ser detectada observando fótons nas várias frequências. A maior parte da matéria bariônica nos aglomerados de galáxias está na forma de gases quentes emitindo raio X [19].

Contudo, nenhuma evidência direta foi encontrada para supor a existência de matéria escura, apesar dos inúmeros esforços. A postulação da matéria escura visa manter a relatividade geral intacta para explicar as lentes gravitacionais e reproduzir as curvas planas de

rotação de galáxias.

2.1.2 MATÉRIA ESCURA EM GALÁXIAS

As curvas de rotação de galáxia são vistas como sendo planas além da região dominada pela matéria luminosa. O problema é explicar porque isto acontece. Se mantivermos a relatividade geral (G.R) na sua forma original, então uma certa quantidade de matéria escura deve existir em torno das galáxias. É principalmente nas galáxias espirais que as curvas ficam planas, enquanto que nas elípticas a curva tende a declinar como se fosse composta por apenas matéria visível.

Medir a massa de uma galáxia através de métodos dinâmicos significa detectar efeitos gravitacionais da massa desta galáxia de uma forma ou de outra. Pela terceira lei de Kepler tem-se:

$$GM(r) = V^2 r, \quad (2.1)$$

onde V é a velocidade orbital da partícula teste (por exemplo uma estrela ao redor da galáxia), e $M(r)$ é a massa da galáxia no interior do raio r [18]. Atualmente

$$\Omega_{LUM} \approx 0.04. \quad (2.2)$$

$\Omega_T = \sum_i \Omega_i = 1$, onde i designa cada componente. Na equação acima i representa a componente luminosa LUM . Continuando a utilizar a dinâmica Newtoniana para além da região visível, através da medida da linha dos 21 cm emitida pelo hidrogênio neutro, deveria surgir uma queda na curva do gráfico *velocidade orbital no eixo y X distância do centro da galáxia no eixo x* [18,19]. Porém não é o que os astrônomos observam, isto é, observa-se uma curva plana a partir da periferia da galáxia, que é justamente onde cessa sua componente visível. Então uma saída foi manter a gravidade convencional e introduzir uma componente não visível de matéria. O resultado foi uma componente com massa cerca de 10 vezes o valor da massa luminosa, que estaria localizada em torno da região visível da galáxia, região denominada halo. Portanto,

$$\Omega_H \approx 0.1. \quad (2.3)$$

A idéia da matéria escura nas galáxias é capaz de explicar duas questões. Em primeiro lugar as mencionadas curvas planas de rotação baseando-se na dinâmica Newtoniana e em segundo lugar compreender o motivo do forte desvio da luz nas periferias das galáxias a partir da relatividade geral.

Nas periferias e nas regiões das galáxias espirais onde não há mais matéria luminosa, as medidas são realizadas a partir da observação de estrelas raras ou medindo o efeito Doppler na linha dos 21 cm emitido pelo hidrogênio neutro(HI) que se encontra na forma de gás [12, 18]. A partir dos dados obtidos plota-se o gráfico da velocidade da partícula teste em torno da galáxia em função da distância ao centro da galáxia, e o resultado é uma velocidade relativamente constante da partícula teste na região onde não há mais matéria luminosa. Introduzindo-se uma certa quantidade de matéria escura em torno da região visível da galáxia e mantendo-se a dinâmica Newtoniana, obtém-se a observada velocidade constante na região onde a luz da galáxia cessa.

O halo é suposto dominar o campo gravitacional na parte exterior da galáxia, e na prática a noção de halo só funciona após um ajuste fino [2]. Também é observado que as curvas de rotação começam a se tornar planas a partir de cerca de 10Kpc do centro da galáxia. Ainda na região plana, a velocidade da partícula teste em galáxias espirais é em torno de 200 – 300km/s [39].

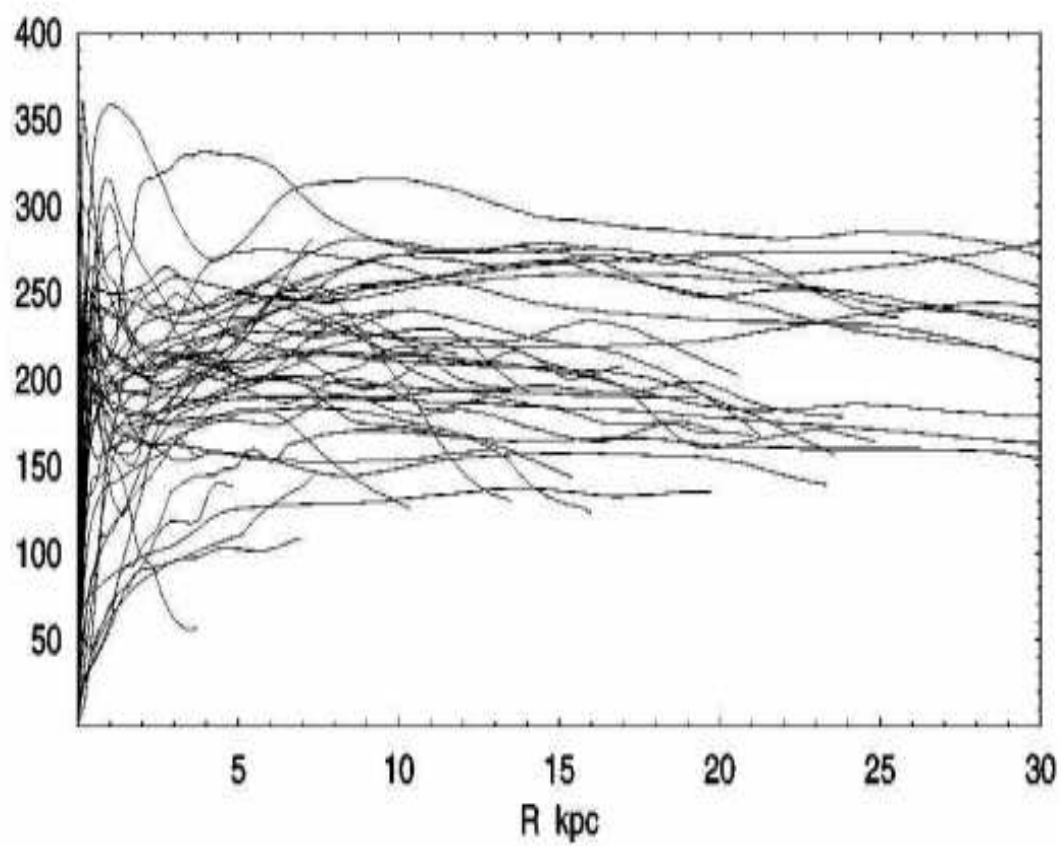


Figura 2.1: Curva de rotação de diversas galáxias espirais; o eixo y designa a velocidade e o eixo x a distância do centro galáctico.

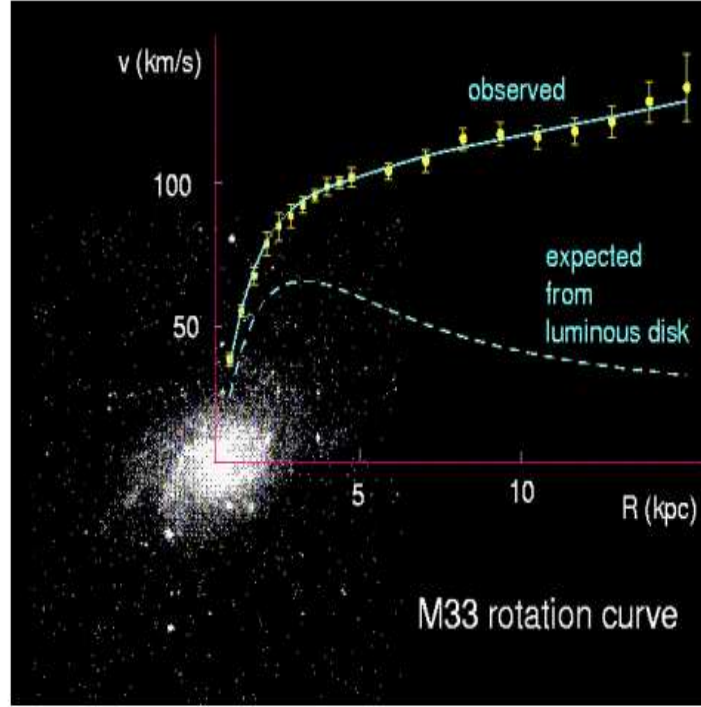


Figura 2.2: Curva de rotação da galáxia espiral M33.

A partir da gravitação Newtoniana

$$\frac{mGM(r)}{r^2} = \frac{mV^2}{r}, \quad (2.4)$$

onde m é a massa da estrela, $M(r)$ é a massa da galáxia e $V(r)$ a velocidade da estrela. Logo, cancelando m obtemos

$$V^2 = \frac{GM(r)}{r}. \quad (2.5)$$

Como na região plana as velocidades das partículas são \approx constantes, então através da equação acima se percebe que a massa da matéria escura é proporcional ao raio $M(r) \propto r$. Logo, a densidade de matéria não luminosa deve variar na forma

$$\rho \propto \frac{M(r)}{r^3} \propto \frac{1}{r^2}. \quad (2.6)$$

Esta relação é verdadeira desde que se assuma que a matéria escura esteja distribuída de forma esféricamente simétrica [12]. Como o campo gravitacional Newtoniano possui a forma [2]

$$|\vec{g}_N| = \left| \vec{\nabla} \varphi \right| = \frac{M(r)G}{r^2}, \quad (2.7)$$

então após uma integração, vê-se que o novo potencial gravitacional gerado pela matéria escura é dado por

$$\varphi(r) \propto \ln(r) \quad (2.8)$$

que conduz às curvas planas.

Lei de Tully-Fisher

A lei de Tully-Fisher afirma que a luminosidade do disco da galáxia perto do infravermelho (banda H) L_H é proporcional à quarta potência da velocidade de rotação na região plana da curva (plateau) [12, 40]:

$$L_H \propto V_c^4. \quad (2.9)$$

O fator de proporcionalidade é constante dentro de cada classe morfológica de galáxia [2]. Para galáxias espirais, este fator está relacionado à razão $\frac{M}{L} \approx 10 - 20 \frac{M_\odot}{L_\odot}$ [1, 2], onde M_\odot e L_\odot correspondem à massa e luminosidade solar respectivamente, sendo que a massa luminosa de um galáxia típica gira em torno de $10^{11} M_\odot$. Esta versão da lei de Tully-Fisher só foi estabelecida após o MOND ser enunciado [2], e a luz infravermelha de uma galáxia provém em sua maior parte de estrelas anãs frias que correspondem à maior parte da massa da galáxia. Surge também uma relação de proporcionalidade entre M (massa visível da galáxia) e L_H . A lei de Tully-Fisher também pode ser enunciada através da relação entre a velocidade da partícula teste no plateau (região plana) V_c e a massa bariônica M da galáxia geradora do campo [20, 40]:

$$M \propto V_c^4 \quad (2.10)$$

Devido a luminosidade ser proveniente da matéria visível, e a velocidade na região plana ser mais fixada pelo halo no modelo de matéria escura, então a lei de Tully-Fisher requer um ajuste fino entre os parâmetros do halo (como velocidade de dispersão) e os parâmetros do disco visível [2]. A equação (2.10) é uma relação entre a massa visível e a velocidade de rotação no plateau, que é devido aos efeitos desta componente visível. Nesta relação é a matéria visível que fixa a velocidade de rotação na região plana. No entanto, se houver presença de matéria escura, a matéria luminosa não seria a única responsável pelos valores das velocidades na curva de rotação e, portanto a lei de T.F. perderia seu sentido. Porém, a lei de Tully-Fisher é uma lei segura e, por isso um ajuste fino é necessário a fim de tentar conciliar a postulação da matéria escura com sua formulação. No entanto, um ajuste fino na

região de transição entre os efeitos do disco e do halo implica no aparecimento de um *calombo* na curva de rotação, o qual não é observado. Novamente outro ajuste fino é necessário para evitar o *calombo* formado [40]. A lei empírica de Tully-Fisher é uma correlação bem afiada. Ela também forma a base para um dos métodos mais seguros nas medidas de distâncias de galáxias espirais [2]. Portanto do ponto de vista da matéria escura, a lei de Tully-Fisher é um mistério [2, 40].

2.1.3 MATÉRIA ESCURA EM AGLOMERADOS DE GALÁXIAS

Nos aglomerados de galáxias, a massa total detectada por métodos dinâmicos, como por exemplo o teorema virial, indica que a massa total deve ser superior à soma das massas das galáxias individuais (massa visível). Segundo a referência [39], a matéria predita pelo teorema virial é cerca de 20 vezes o valor da matéria bariônica. Por outro lado, o artigo [12] sugere que pelo mesmo método, a massa total seria cerca de 5 a 10 vezes a massa observada nas galáxias (visível) e gases quentes que emitem raio X, sendo estes últimos responsáveis pela maior parte dos bárions nos aglomerados [19].

Para que os agrupamentos de galáxias estejam em equilíbrio dinâmico [1], a energia cinética e a energia potencial do sistema devem estar relacionados na forma

$$E_c + \frac{E_p}{2} = 0 \quad (2.11)$$

que é o teorema virial [1]. $E_p \approx -GM^2/R$ é a energia potencial de um aglomerado de raio R , e $E_c \approx 3M \langle V^2 \rangle / 2$ é a energia cinética. O teorema virial também pode ser escrito como

$$GM = \frac{2 \langle V^2 \rangle}{\langle r^{-1} \rangle}, \quad (2.12)$$

onde M é a massa do aglomerado, $(\langle V^2 \rangle^{1/2})$ é a velocidade média entre as galáxias que pode ser obtida através de amostras de redshift e $\langle r^{-1} \rangle$ é o inverso da distância média entre as galáxias [14, 18]. O teorema virial conecta velocidades peculiares devido a presença de inhomogeneidades em escalas r e prediz que a contribuição da massa total nos aglomerados, isto é, a visível mais a do halo mais uma terceira quantidade contribuiriam com aproximadamente 0.1 – 0.2 no valor de $\Omega_0 = 1$ [18]. Ao contrário das galáxias, em que as partículas (estrelas, planetas etc) se movem de forma ordenada, nos aglomerados isso não acontece. Ocorre justamente o contrário, as partículas (galáxias) se movem ao acaso a partir de uma velocidade peculiar. Esta velocidade corresponde à componente perturbada

da velocidade total da galáxia, isto é, trata-se da velocidade em relação ao referencial de repouso cósmico.

Em um aglomerado típico $\frac{M}{L} \approx 300 \frac{M_\odot}{L_\odot}$ por [1, 14], porém no aglomerado de Coma este valor cai para $\frac{M}{L} \approx 150 \pm 40 \frac{M_\odot}{L_\odot}$ [14]. A massa da matéria escura em torno das galáxias aumenta de forma proporcional à distância do centro galáctico. Nos aglomerados, a medida do forte desvio da luz indica que a matéria escura está fortemente concentrada numa região central. A massa típica de um aglomerado de galáxia varia de $10^{13} - 10^{15} M_\odot$ e o de uma galáxia típica $10^{11} M_\odot$. O teorema virial [40] dá uma estimativa da massa no interior dos agrupamentos de galáxias, que é muito maior do que a soma das massas das galáxias dos agrupamentos dando margem para postular a existência de matéria escura. Nas últimas duas décadas, gases quentes emitindo raio X [12] têm sido encontrado em abundância em vários agrupamentos de galáxias [40]. A partir do teorema virial [12, 39] pode-se fazer uma estimativa da massa total dentro de um agrupamento de galáxias típico, e foi observado que este valor é cerca de 5 a 10 [12] vezes a soma das massas individuais de todas as galáxias (componente visível) do aglomerado mais a massa dos gases quentes que emitem raio X e que também compõem o aglomerado. A medida da deflexão da luz provocada por vários destes aglomerados indica aproximadamente o mesmo valor da massa predita pelo teorema virial [12], portanto a massa extra em gás só ajudou a resolver o problema da massa faltante, porém ainda há uma quantidade não detectada [12]. A maior parte da massa bariônica nos aglomerados de galáxias está na forma de gases quentes [19]. Concluindo, os cálculos realizados pelo método dinâmico (teorema virial) e pelo desvio da luz dão o mesmo valor para a massa faltante. Isto seria uma justificação a favor da matéria escura [40].

2.1.4 FORMAÇÃO DE ESTRUTURAS

Tratamento não relativístico

A primeira teoria séria sobre formação de estruturas foi proposta por Sir James Jeans no início do século vinte. Jeans supôs que o universo era preenchido por um fluido não relativístico, com densidade de massa ρ , pressão p , velocidade \vec{v} e um campo gravitacional \vec{g} , governados pelas equações da continuidade e de Euler:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) = 0, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g}, \quad (2.14)$$

e pelas equações abaixo

$$\vec{\nabla} \times \vec{g} = 0, \quad (2.15)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho. \quad (2.16)$$

Neste modelo, que é estático, foi suposto que as componentes não perturbadas p e ρ fossem constantes e $\vec{v} = 0$. Após introduzir pequenas perturbações ρ_1 , p_1 , \vec{v}_1 e \vec{g}_1 , encontram-se as equações perturbadas em primeira ordem das relações acima:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 = 0, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\frac{v_s^2 \vec{\nabla} \rho_1}{\rho} + \vec{g}_1, \quad (2.18)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{g}_1 = 0, \quad (2.19)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g}_1 = -4\pi G\rho_1, \quad (2.20)$$

onde v_s^2 é a velocidade do som que é dada por

$$v_s^2 = \frac{p_1}{\rho_1} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right). \quad (2.21)$$

Todas as grandezas que não possuem o índice 1 são grandezas não perturbadas. Combinando estas equações perturbadas encontra-se:

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} = v_s^2 \vec{\nabla}^2 \rho_1 + 4\pi G\rho_1 \quad (2.22)$$

cuja solução possui a forma

$$\rho_1 \propto \exp(i\vec{k}\vec{x} - i\omega t). \quad (2.23)$$

Introduzindo (2.23) em (2.22) surge a equação chamada de *relação de dispersão*:

$$\omega^2 = \vec{k}^2 v_s^2 - 4\pi G\rho. \quad (2.24)$$

Para $\omega = 0$ surge,

$$k_j = \left(\frac{4\pi G\rho}{v_s^2} \right)^{1/2}, \quad (2.25)$$

onde k_j é chamado de vetor de onda de Jeans. ω é imaginário para $k < k_j$ e neste caso haverá um crescimento exponencial. No entanto se ω for real, as perturbações oscilarão como ondas sonoras [8,18]. De qualquer maneira o modelo de Jeans não serve para explicar a formação de estruturas pois ele assumiu um universo estático. Em 1929 Edwin Hubble

fez uma observação fundamental, segundo a qual as galáxias estão se afastando umas das outras não importa a direção que se olhe, isto é, o universo está se expandindo. Neste caso a distância física é dada por $x_f = x_c a(t)$ e o vetor de onda físico dado por $k_f = \frac{k_c}{a(t)}$, onde $a(t)$ é o fator de escala. A métrica que descreve a expansão do universo é chamada de métrica de Robertson-Walker e é dada por

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Ar^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right], \quad (2.26)$$

onde A é uma constante que pode ser igual a $+1$, -1 ou 0 .

Seja uma esfera de raio $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. Então a massa total dentro desta esfera é dada por

$$M = \frac{4\pi n m_H}{3} \left(\frac{2\pi}{k} \right)^3, \quad (2.27)$$

onde $k = k_f$ e n a densidade do número de hidrogênio. A massa de Jeans é definida como

$$M_J = \frac{4\pi n m_H}{3} \left(\frac{2\pi}{k_J} \right)^3 \quad (2.28)$$

Como foi visto a única maneira de haver crescimentos é para $k < k_J$, então só haverá também crescimentos para $M > M_J$. Usando a equação (2.28), a eq. (2.25) para o caso com expansão e levando em conta o termo de pressão encontra-se:

$$M_J = \frac{4\pi n m_H}{3} \left(\frac{\pi v_s^2}{G(\rho + p)} \right)^{3/2} \quad (2.29)$$

Levando em conta a expansão do universo a densidade de energia perturbada é escrita como:

$$\rho_1(\vec{r}, t) = \rho_1(t) \exp \left(\frac{i\vec{r}\vec{q}}{R} \right), \quad (2.30)$$

onde \vec{r} é a distância física e \vec{q} o vetor de onda coordenada. Uma grandeza importante por ser adimensional é a contraste densidade que é definida como:

$$\delta(t) = \frac{\rho_1(t)}{\rho(t)}, \quad (2.31)$$

onde $\rho(t) \propto a^{-3}(t)$ no período dominado pela matéria. As equações perturbadas da continuidade e de Euler levando em conta a expansão do universo são :

$$\dot{\rho}_1 + 3\frac{\dot{a}}{a} + \rho \vec{v}_1 \left(\frac{i\vec{q}}{a} \right) = 0 \quad (2.32)$$

e

$$\dot{\vec{v}}_1 + \frac{\dot{a}}{a} \vec{v}_1 = -\frac{v_s^2 \rho_1}{\rho} \left(\frac{i\vec{q}}{a} \right) + \vec{g}_1. \quad (2.33)$$

também existe:

$$\vec{\nabla} \times \vec{g}_1 = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{g}_1 = -4\pi\rho_1. \quad (2.34)$$

Então a partir das equações perturbadas (2.32), (2.33), (2.34) e de (2.31) surge a importante equação

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} = -v_s^2 \frac{q^2}{a^2} \delta + 4\pi G\rho\delta. \quad (2.35)$$

As galáxias são supostas crescer a partir de pequenas flutuações presentes na época da recombinação. A questão é saber como tais flutuações de protogaláxias poderiam crescer até o presente. Em outras palavras, qual o tamanho que as flutuações precisariam ter na recombinação para haver possibilidade delas crescerem a ponto de originar as galáxias que observamos. Medidas da radiação de fundo sugerem $\delta_R \approx 10^{-5}$ em torno de $z = 1100$ [1]. No caso em que a pressão da matéria se anula, o termo velocidade do som $v_s^2 = (\frac{\partial p}{\partial \rho})_{adiabático}$ se anula também. Consequentemente sem a pressão da matéria, a força gravitacional pode agir livremente conduzindo a um colapso. Este seria o inverso do caso de um gás ideal, onde o termo de pressão é muito maior do que as forças gravitacionais conduzindo o gás a aumentar o seu volume. Uma maneira de eliminar também o termo de pressão é supor

$$k = \frac{q}{a} \ll k_J \quad (2.36)$$

ou de forma equivalente $M \gg M_J$. Por (2.35) e (2.36) obtém-se

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} - 4\pi G\rho\delta = 0. \quad (2.37)$$

Como no período dominado pela matéria $\rho \propto \frac{1}{a^3}$ e $a \propto t^{2/3}$, então a solução de (2.37) é dada por

$$\delta \propto t^{2/3}. \quad (2.38)$$

Se $k \ll k_J$, o termo de pressão na eq.(2.35) não tem importância pois o tempo de resposta da onda de pressão é grande comparado com o tempo de crescimento de δ [18]. Neste caso o termo de pressão não tem importância na eq.(2.35). As protogaláxias começariam a se formar em $z \approx 1500$ [8], enquanto que as galáxias se formariam em torno de $z = 1$. No regime linear ($\delta = \frac{\delta_p}{\rho} \propto a$, $\delta < 1$), o tamanho físico de uma dada densidade de perturbação cresce com a expansão : $\lambda_f = a(t)\lambda$. Se isso continuasse indefinidamente, então o tamanho físico de uma galáxia com massa $10^{12}M_\odot$ teria hoje um tamanho aproximado de 1.9Mpc, o

que não é verdade, já que o valor típico é de 30kp. Por isso, a perturbação passa para um regime não linear ($\delta > 1$) em algum momento no passado dentro do período dominado pela matéria [18]. Uma vez que a perturbação entra no regime não linear ($\delta \propto a^n$, $n > 3$, $\delta > 1$), ela se separa da expansão, isto é, ela cessa de expandir e se torna um sistema gravitacional auto-ligado. Então 1.9Mpc seria o tamanho que uma galáxia teria hoje, caso a perturbação δ não tivesse passado para o regime não linear e, portanto não tivesse se separado da expansão do universo.

A noção de matéria escura não bariônica também é capaz de explicar as fortes condensações que observamos hoje. Caso a matéria total fosse apenas bariônica, não haveria como explicar as estruturas observadas atualmente, pois não haveria tempo suficiente desde o desacoplamento até hoje para elas se formarem na maneira como são vistas. A partir de experimentos com a radiação de fundo, as perturbações na época do desacoplamento ($z \approx 1100$) teriam um valor $\delta_R \approx 10^{-5}$. Como hoje $\delta > 1$, o modelo da matéria exclusivamente bariônica, sem a presença de matéria escura não bariônica, exigiria $\delta_R \approx 10^{-3}$, valor em contradição com a observação, a fim de explicar as fortes condensações que observamos hoje. Por outro lado, no modelo não bariônico, a ausência de acoplamento entre matéria escura não bariônica e radiação conduziria a um crescimento das estruturas muito antes do desacoplamento. Desta forma, após os bárions se livrarem da pressão da radiação (desacoplamento), eles poderiam colapsar muito mais rapidamente em comparação com o modelo exclusivamente bariônico, devido a atração gravitacional da matéria escura não bariônica já desacoplada. Em resumo, um universo com matéria escura não bariônica pode originar as estruturas observadas hoje, a partir das pequenas flutuações iniciais observadas ($\delta_R \approx 10^{-5}$). De acordo com a nucleossíntese primordial, os bárions seriam responsáveis por apenas 4% da densidade de energia total hoje, ou seja, $\Omega_{b0} \approx 0.04$ [1, 19]. Cerca de 25% consistiria de matéria não bariônica, e os outros 70% da densidade da energia total seria composta por uma componente pouco conhecida denominada energia escura. O modelo com $\Omega_{mo} = 1$ deve ser descartado com segurança [19] e origina um crescimento da perturbação contraste densidade proporcional a $t^{2/3}$. Este modelo possui uma quantidade de matéria escura que vai além do valor permitido pelas observações. Há duas possibilidades para matéria escura não bariônica, o HDM que significa *Hot Dark Matter* (matéria escura quente) e o CDM que significa *Cold Dark Matter* (matéria escura fria). Os dois casos serão discutidos separadamente.

(i)HDM: neste modelo é assumido que as partículas desacoplaram da matéria/radiação

quando eram relativísticas e, por isso possuem grande velocidade de dispersão [1]. O modelo inclui somente neutrinos leves. Os neutrinos, que são férmions de spin $1/2$, não colidem entre si e também não podem colapsar em direção a objetos ligados mais compactos. Portanto, eles ficam menos condensados, e o resultado é uma espécie de sandwich em que a carne são os bárions. Também só interagem com a matéria no caso particular da desintegração beta inversa. Neste modelo, estruturas denominadas proto-pancake com massa típica de um aglomerado de galáxias são as primeiras a surgirem [1, 14]. As galáxias formadas aparecem devido a fragmentação destas estruturas, e este cenário é chamado de pancake ou top down. Devido os bárions estarem bastante aquecidos no quadro HDM, eles teriam dificuldade em colapsar [18]. Se os neutrinos dominassem a matéria escura, então o universo seria bem diferente do atual [19]. Também a fim de reproduzir as observadas funções correlação, que medem a probabilidade de encontrar duas galáxias separadas por uma distância r , a época da formação das galáxias deveria ter acontecido em z menor ou igual a 1. Porém, é observado galáxias que se formaram em redshift maior que 1, talvez até 3 [18]. Por estas e outras razões, existe uma certa resistência em aceitar este modelo.

(ii)CDM: ao contrário do modelo anterior, aqui as partículas desacoplaram da matéria/radiação quando eram não relativísticas, e também a velocidade de dispersão é baixa. Os seus principais candidatos são A) os neutralino que são neutros, férmions e WIMP (Weakly Interacting massive particle) e também teriam massa entre 100 a 1000 GeV [1]; B) outro candidato com características bem diferentes é o áxion com massa aproximadamente 10^{-5} eV [1, 14]; C) os fotinos; D) axinos; E) os gravitinos. Neste modelo as grandes estruturas (galáxias) seriam formadas a partir do colapso de várias subestruturas, e este cenário é chamado de bottom -top.

Seja qual for sua natureza, a matéria escura parece realmente existir pelo menos nos aglomerados de galáxias.

Tratamento relativístico

No período dominado pela radiação, ao contrário do da matéria, um tratamento relativístico é necessário. Novamente a métrica de Robertson-Walker com curvatura zero, é dada por

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (2.39)$$

e a conexão é dada por

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} (g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}) \quad (2.40)$$

onde as letras gregas representam (t, x, y, z) e as latinas representam (x, y, z) . As únicas conexões que não se anulam são

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{a}}{a} \delta_{ij} \quad (2.41)$$

e

$$\Gamma_{ij}^0 = \dot{a} a \delta_{ij}. \quad (2.42)$$

O tensor de Ricci é dado por

$$R_{\beta\nu} = g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (2.43)$$

onde

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\lambda} \left(\Gamma_{\beta\mu,\nu}^\lambda - \Gamma_{\beta\nu,\mu}^\lambda + \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda \Gamma_{\beta\nu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda \Gamma_{\beta\mu}^\sigma \right). \quad (2.44)$$

Após alguns cálculos encontra-se que

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{a} \quad (2.45)$$

e

$$R_{ij} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) \delta_{ij}. \quad (2.46)$$

Estas são as equações não perturbadas.

Adotando a métrica com perturbação, ela adquire a forma:

$$ds^2 = (-1 + h_{00}) dt^2 + (a^2(t) \delta_{ij} + h_{ij}) (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (2.47)$$

No calibre síncrono, o qual será utilizado, $h_{i0} = h_{00} = 0$. Neste calibre as conexões que não zeram são dadas por

$$\Gamma_{ij}^0 = \frac{1}{2} (2a\dot{a}\delta_{ij} + \dot{h}_{ij}), \quad (2.48)$$

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{1}{2a^2} \left(2a\dot{a}\delta_{ij} + \dot{h}_{ji} - 2h_{ij}\frac{\dot{a}}{a} \right), \quad (2.49)$$

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2a^2} (h_{ij,k} + h_{ik,j} - h_{jk,i}). \quad (2.50)$$

Usando as conexões acima junto com as definições (2.43) e (2.44) encontra-se

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{h}}{2a^2} + \dot{h} \frac{\dot{a}}{a^3} + h \left(\frac{\ddot{a}}{a^3} - \frac{\dot{a}^2}{a^4} \right), \quad (2.51)$$

onde $h = h_{xx} + h_{yy} + h_{zz}$. A equação acima contém não só a componente perturbada, mas também a não perturbada. No momento só a componente perturbada é a importante. As variáveis perturbadas se comportam da forma

$$h_{ij}, \rho_1, p_1, \vec{U}_1 \propto \exp(i\vec{q}\vec{x}) = \exp i(q_x x_x + q_y x_y + q_z x_z), \quad (2.52)$$

onde \vec{q} e \vec{x} são o vetor de onda coordenada e distância coordenada respectivamente. \vec{U}_1 é a velocidade peculiar gerado pelas inomogeneidades. ρ_1 e p_1 são densidade de energia perturbada e a pressão perturbada respectivamente.

A equação de Einstein também pode ser escrita como

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right). \quad (2.53)$$

Seja

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T, \quad (2.54)$$

então

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G S_{\mu\nu}. \quad (2.55)$$

T é o traço do tensor momento energia, e o último é dado por

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) U^\mu U^\nu + p g^{\mu\nu}. \quad (2.56)$$

O termo U^μ é a velocidade e sua componente temporal é dada por $U^0 = 1$ e $U_0 = -1$ na convenção $(-+++)$. Sua componente perturbada é $U_1^0 = 0$. A partir destes dados encontra-se

$$S_{00}^1 = \frac{1}{2} (\rho_1 + 3p_1). \quad (2.57)$$

Através da componente perturbada da eq.(2.51) mais (2.55) e (2.57) surge a importante relação

$$\ddot{h} - 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{h} + 2\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a}\right)h = -8\pi G (\rho_1 + 3p_1) a^2. \quad (2.58)$$

Outra equação importante é a da conservação da energia que é dada por

$$\dot{\rho}_1 + \frac{3\dot{a}}{a}(\rho_1 + p_1) = -(\rho + p) \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{h}{2a^2} \right) + \vec{\nabla} \vec{U}_1 \right\}. \quad (2.59)$$

Fazendo $|\vec{q}| \ll 1$, o termo $\vec{\nabla} \vec{U}_1$ tende a zero e deve ser desprezado. Então neste caso a eq.(2.59) pode ser integrada fornecendo

$$\frac{h}{2R^2} = -\frac{2\rho_1}{\rho + p} \quad (2.60)$$

e definindo a contraste densidade como

$$\delta = \frac{\rho_1}{(\rho + p)}, \quad (2.61)$$

então unindo (2.60) com (2.61) encontra-se

$$h = -2a^2\delta. \quad (2.62)$$

Usando (2.62), (2.61), (2.58), e admitindo que $v_s^2 = \frac{p_1}{\rho_1}$ encontra-se a equação

$$\ddot{\delta} + \dot{\delta} \left(\frac{2\dot{a}}{a} \right) - 4\pi G\rho(\rho + p) (1 + 3v_s^2) \delta = 0. \quad (2.63)$$

No período dominado pela radiação $\rho \propto \frac{1}{a^4}$ e $a \propto t^{1/2}$. Também $p = \frac{\rho_r}{3}$ e, portanto $v_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{1}{3}$. Através destes dados é possível calcular o crescimento da contraste densidade durante a época em que a radiação dominava a densidade de energia, que é dada por

$$\delta \propto t \quad (2.64)$$

A equação (2.37) é reencontrada a partir de (2.63), com os termos de pressão $v_s^2 = 0$ e $p = 0$.

2.2 ENERGIA ESCURA

Há várias indicações de que o universo é plano, isto é, $\Omega_0 = 1$. De acordo com a inflação este valor deve ser o correto, no entanto existem outras formas de confirmação. Existe outro método, que consiste em relacionar o número de galáxias contadas em função do redshift z [18], que também prevê o valor unitário para Ω_0 . As medidas da anisotropia da radiação de fundo associada às observações das supernovas tipo Ia com alto redshift [42] também fazem previsões de que a densidade de energia da matéria corresponde a aproximadamente 1/3 e os outros 2/3 a uma componente exótica de propriedades ainda não bem conhecidas e, por isso chamada de energia escura. Estas observações também sugerem que o universo deve estar numa fase de aceleração. Em 1998, dois grupos (Riess et al., Perlmutter et al, 1999) observando supernovas informaram evidência direta da energia escura a qual é responsável pela aceleração do universo [19]. A evidência é baseada na diferença entre a distância luminosa de um universo dominado por matéria escura e outro dominado por energia escura. A distância luminosa é maior em um universo dominado por energia escura e, por isso objetos com brilho fixo aparecerão mais fracos em um universo dominado por energia escura do que em um composto exclusivamente por matéria [19]. Devido as supernovas tipo Ia serem bastante brilhantes, elas se tornam ideais para estudar as propriedades do universo a grandes distâncias [1]. Em um universo plano dominado exclusivamente pela matéria ($\Omega_m = 1$), a distância luminosa para $z = 0.83$ é igual a $0.95H_0^{-1}$, enquanto que em um universo dominado pela energia escura, $\Omega_\Lambda = 0.7$ e $\Omega_m = 0.3$, a distância luminosa passa a

ser $1.23H_0^{-1}$. O primeiro caso, que consiste em um universo dominado somente pela matéria pode ser excluído com confiança [19].

O exemplo mais simples de energia escura, é o da constante cosmológica introduzido por Einstein em 1917. O objetivo inicial era bastante diferente do de hoje. Einstein tinha suposto um universo estático, e para não haver colapso gravitacional, ele introduziu uma constante cosmológica com efeito anti gravitacional. Com a descoberta de que o universo se expandia, ela perdeu seu sentido e desapareceu. Contudo, ao se descobrir posteriormente que o universo estava acelerando, a constante cosmológica foi novamente aproveitada, a fim de reintroduzir o efeito antigravitacional.

A indicação de que o universo está acelerando provém de dados das supernovas tipo Ia e medidas da anisotropia de fundo [19,24,25], e esta expansão acelerada é responsável pelas supernovas serem vistas de forma muito fraca, que só pode ser causada por uma energia escura com pressão negativa [19]. Pressão negativa é algo que não nos é familiar [19]; matéria não relativística pode ter uma pequena pressão e é positiva, e no caso da radiação $p = +\frac{\rho}{3}$ que é novamente positiva [19]. Na relatividade geral temos:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (2.65)$$

A partir desta equação, vê-se claramente que $\ddot{a} = 0$ somente se $p = -\frac{\rho}{3}$, isto é, o universo começa a acelerar a partir de $p < -\frac{\rho}{3}$, com pressão obviamente negativa já que a densidade de energia é sempre positiva. A presença de pressão negativa também aparece na inflação, período em que o termo cinético em $\rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi)$ é desprezado e sobra apenas o potencial $V(\phi)$, originando $\rho_\phi = -p_\phi = V(\phi)$. A variável ϕ é o campo escalar.

O primeiro candidato que surgiu para representar esta desconhecida forma de energia foi a constante cosmológica, consistindo no modelo Λ CDM. Variações surgiram com uma ‘variável constante cosmológica’. Atualmente existem vários candidatos que solucionam um problema e deixam outros em aberto, entre eles estão o modelo Λ CDM, quintessência, o caso fantasma, a K-essence, branas, gás de Chaplygin, cordas cósmicas [4] etc.

A seguir será discutido algumas destas possibilidades.

2.2.1 Λ CDM

Este é o modelo mais simples que envolve energia escura. Ele é capaz de explicar a aceleração do universo em acordo com os dados de supernovas que são vistas de forma bem fraca. Um universo acelerado só pode ocorrer a partir de uma energia escura com pressão negativa [19].

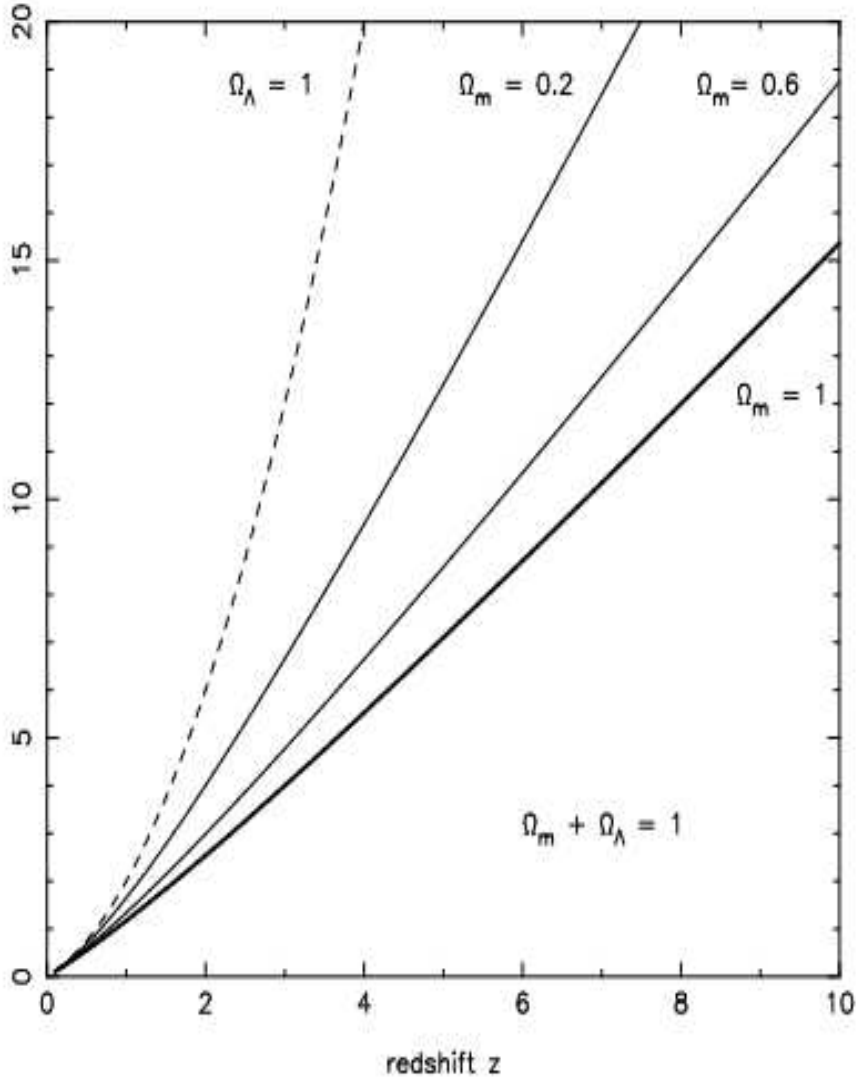


Figura 2.3: O eixo y representa a distância luminosa. A distância luminosa é maior em um universo dominado por energia escura do que um dominado por matéria.

A equação de Einstein tem a forma

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi G \left[T_{\alpha\beta} + \frac{\Lambda g_{\alpha\beta}}{8\pi G} \right]. \quad (2.66)$$

A convenção da equação acima é $(+ - - -)$. $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$ e, portanto, o parâmetro da equação de estado é $w_\Lambda = -1$. O valor da constante cosmológica Λ , deve ser pequeno quando comparado com o valor predito, isto é, o valor observado é cerca de 10^{120} vezes menor que o valor predito. Um valor pequeno de Λ garante que o universo começou a acelerar recentemente e, por isso, $\frac{\Lambda}{8\pi G} \approx 10^{-47} \text{GeV}^4$ [1]. A constante cosmológica é responsável por

uma força repulsiva proporcional à distância [1] ao contrário da gravitacional e, por isso é capaz de acelerar o universo. O fator de escala evolui da forma

$$a(t) = a_i \left(\sinh \left[\frac{3}{2} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} ct \right] \right)^{2/3}, \quad (2.67)$$

e interpola entre o universo dominado pela matéria $a \propto t^{2/3}$ no passado e a fase de aceleração no futuro governada por $a \propto e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}$. Esta solução exponencial corresponde ao universo de De Sitter. Devido $\Omega_0 = 1$ hoje, então $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$, e a partir de $\Omega_\Lambda > 0.74$, o universo já é mais velho do que H_0^{-1} . No limite $\Omega_\Lambda \mapsto 1$, $t_0 \mapsto \infty$.

Por estar em grande acordo com as observações, muitos modelos de energia escura se apóiam nos resultados do modelo Λ CDM.

2.2.2 QUINTESSÊNCIA

A quintessência é uma outra candidata à energia escura. Seu nome deriva do fato dela ser mais uma componente além dos fótons, bárions, neutrinos e matéria escura. Junto com a matéria, hoje $\Omega_0 = 1$. No modelo Λ CDM padrão existe uma componente fixa (Λ). Na quintessência, por outro lado, existe uma componente dinâmica representada por um campo escalar ϕ e um potencial $V(\phi)$. Também $\Omega_\phi \approx 0.7$ como esperado. A quintessência possui um campo escalar que varia devagar (slow roll) [23].

Um submodelo em particular chamado de quintessência ‘campo tracker’ tem a vantagem de poder solucionar o problema da coincidência segundo a referência [22]. O problema da coincidência consiste em questionar o fato de vivermos justamente numa época em que $\rho_m \approx \rho_D$ (densidade de energia escura). Seria pura coincidência? Viveríamos numa época privilegiada, em que a densidade da energia escura passa a dominar a densidade de energia do universo só recentemente ($z \approx 0.7$) e, por consequência conduziria à aceleração do universo em um momento bem próximo do presente? No modelo Λ CDM $r = \frac{\rho_\Lambda a^3}{\rho_m^0}$, logo a razão das densidades r varia de 0 a ∞ . Atualmente $r_0 = \frac{\rho_\Lambda^0}{\rho_m^0} \approx \frac{7}{3} \approx 1$. Por este ponto de vista estaríamos realmente vivendo em um momento privilegiado, o que não é bem aceito pelos cosmólogos devido a enorme coincidência. A quintessência ‘campo tracker’ tenta resolver esta questão [22], e sua cosmologia é insensível às condições iniciais [23]. Por outro lado, o modelo necessita de um ajuste fino a fim de iniciar o período de pressão negativa do campo e consequentemente a aceleração do universo [24]. De forma diferente, na K-essência (próximo modelo a ser discutido) a transição ocorre através de processos dinâmicos naturais.

A densidade do lagrangeano da quintessência padrão é dada por [1]

$$L = \frac{\phi^{\cdot\alpha}\phi_{,\alpha}}{2} - V(\phi) \quad (2.68)$$

e o parâmetro da equação de estado possui a forma,

$$\omega_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi)}{\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi)} \quad (2.69)$$

com

$$\omega_\phi > -1. \quad (2.70)$$

Combinando a análise da radiação de fundo com dados das supernovas e aglomerado de galáxias, o parâmetro da equação de estado da energia escura deve estar no intervalo $-1.61 < \omega_D < -0.78$ [43], com 95% de segurança.

Voltando ao modelo tracker, o parâmetro ω_ϕ varia de acordo com ω_b [22]. Quando o universo é dominado pela radiação ($\omega_b = \frac{1}{3}$), então ω_ϕ é menor ou igual a $\frac{1}{3}$, e ρ_ϕ diminui mais vagarosamente do que a densidade de energia da radiação. Quando o universo é dominado pela matéria ($\omega_b = 0$), então ω_ϕ é menor do que 0 e ρ_ϕ decresce mais devagar do que a densidade de energia da matéria. Uma vez que ρ_ϕ supera a densidade de energia da matéria, $\omega_\phi \mapsto -1$ e $\Omega_\phi \mapsto 1$. O formato do potencial na quintessência é bastante variado, podendo ser exponencial, proporcional à potência de ϕ [1] etc. Segundo a referência [25], o modelo “tracker” não pode possuir um potencial puramente exponencial. A quintessência também foi usada por Hao no artigo [44] com objetivo do campo escalar imitar a energia escura na teoria TeVeS (Tensor Vector Escalar).

Os potenciais usados na quintessência são:

$V_0 \exp(-\lambda\phi)$	Ratra & Peebles (1988), Wetterich (1988), Ferreira & Joyce (1998)
$m^2\phi^2, \lambda\phi^4$	Frieman et al (1995)
$V_0/\phi^\alpha, \alpha > 0$	Ratra & Peebles (1988)
$V_0 \exp(\lambda\phi^2)/\phi^\alpha$	Brax & Martin (1999,2000)
$V_0(\cosh \lambda\phi - 1)^p$	Sahni & Wang (2000)
$V_0 \sinh^{-\alpha}(\lambda\phi)$	Sahni & Starobinsky (2000), Ureña-López & Matos (2000)
$V_0(e^{\alpha\kappa\phi} + e^{\beta\kappa\phi})$	Barreiro, Copeland & Nunes (2000)
$V_0(\exp M_p/\phi - 1)$	Zlatev, Wang & Steinhardt (1999)
$V_0[(\phi - B)^\alpha + A]e^{-\lambda\phi}$	Albrecht & Skordis (2000)

Figura 2.4: Potenciais possíveis no modelo quintessência

O modelo quintessência pode ser dividido em duas categorias [51]. O primeiro, denominado modelo ‘freezing’, o parâmetro da equação de estado w_ϕ possui um valor arbitrário inicial e decresce com o tempo tendendo de maneira assintótica para o valor -1 . O segundo, denominado modelo ‘thawing’, possui $w_\phi \approx -1$ inicialmente e aumenta com o tempo. No modelo tracker, w_ϕ decresce assintoticamente em direção a -1 [51]. O artigo [51], ao contrário dos artigos [22, 23], afirma que o modelo ‘tracker’ não pode resolver o problema da coincidência devido aos ajustes finos necessários nesta teoria.

2.2.3 K-ESSÊNCIA

A K-essência é um modelo, em oposto à quintessência, que possui o termo cinético dominando sobre o potencial, daí a letra K [20]. Segundo [20] este modelo reproduz muitas características cosmológicas de forma mais natural do que a quintessência [20]. Este modelo também possui o termo cinético não linear na ação, o que é unfamiliar para a física de partícula e cosmologia [25]. A K-essência também tem como objetivo resolver o problema da coincidência [25]. Vários candidatos à energia escura (inclusive a constante cosmológica) necessitam de um ajuste fino na densidade da energia escura inicial para que ela se torne

cerca de 100 a 120 ordens de magnitude menor do que a densidade de energia inicial da matéria [25].

O propósito da K-essência é fornecer uma explicação dinâmica que não necessita de ajuste fino das condições iniciais [25]. Tanto na K-essência quanto no modelo quintessência tracker, o campo escalar converge para uma solução atrator [24]. A diferença está no mecanismo que inicia o regime de pressão negativa do campo e consequentemente a aceleração do universo. No modelo tracker é necessário um ajuste fino enquanto na K-essência a transição ocorre a partir de processos dinâmicos naturais. A K-essência não pode dominar nem antes nem logo depois do início do período dominado pela matéria pois neste momento sua energia cai por várias ordens de magnitude. Desde que sua densidade de energia diminui de maneira mais devagar do que a densidade de energia da matéria a medida que o universo expande, a K-essência só pode se tornar componente dominante apenas recentemente [24].

Uma característica importante da K-essência é que ela pode produzir energia escura com uma velocidade do som menor do que a da luz [16].

2.2.4 CAMPO FANTASMA

O campo fantasma é caracterizado por possuir o termo cinético negativo e um parâmetro da equação de estado $\omega_\phi < -1$. Um importante artigo de Caldwell [110] argumenta que um bom ajuste na distância luminosa derivada de supernova é fornecido por uma energia escura com parâmetro da equação de estado dado por $\omega_\phi < -1$. Ele chamou de energia escura fantasma. Este modelo não está sem problemas, pois uma equação de estado ultranegativa sugere que a velocidade do som no meio $v = \sqrt{\left|\frac{dp}{d\rho}\right|}$ pode ser maior do que a velocidade da luz [1]. Também, o sinal negativo no termo cinético causa instabilidades no nível quântico, tornando o modelo suspeito [1]. Se o campo fantasma representar a energia escura no presente momento, a densidade da energia escura deve ser positiva $\rho_D^0 > 0$ se $0 < \Omega_m^0 < 1$ e se $\Omega_m^0 + \Omega_D^0 = 1$ [4]. O modelo fantasma padrão viola todas as condições clássica de energia (fraca e forte) e reproduz um efeito antigravitacional muito maior do que o da constante cosmológica segundo [4] além de conduzir a uma singularidade chamada de big rip. Neste modelo, o universo entraria numa fase de super-aceleração no futuro até se auto-destruir em um instante finito [4].

Tanto o fator de escala a quanto a densidade de energia ρ_ϕ tendem ao infinito (divergem) após um intervalo de tempo finito t_{br} [1, 39]. Seja t_{eq} a época em que a densidade de energia do campo fantasma e da matéria são iguais [1]. Usando este dado, o fator de escala em um

universo dominado por energia fantasma é escrito na forma [1]

$$a(t) \approx a(t_{eq}) \left[(1 + w_\phi) \frac{t}{t_{eq}} - w_\phi \right]^{2/3(1+w_\phi)}, \quad w_\phi < -1 \quad (2.71)$$

e diverge

$$a(t) \rightarrow \infty, \quad (2.72)$$

em um intervalo de tempo finito

$$t \rightarrow t_{br} = \left(\frac{w_\phi}{1 + w_\phi} \right) t_{eq}. \quad (2.73)$$

O parâmetro de Hubble também diverge quando $t \rightarrow t_{br}$ [1]. Esta divergência está associada com a divergência da densidade de energia fantômica, que é dada por [1]:

$$\rho_\phi(t) \propto \left[(1 + w_\phi) \frac{t}{t_{eq}} - w_\phi \right]^{-2}. \quad (2.74)$$

Assim, $\rho_\phi(t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow t_{br}$, isto é, a energia fantasma culminará em uma futura singularidade denominada ‘big rip’.

Também existem casos particulares do modelo fantasma, em que $w \neq \text{constante}$ [37], ao contrário do modelo de Caldwell que assume w constante. Segundo a referência [37], existem casos em que quando a condição de energia dominante ($\rho > |p|$) é violada, e w é não constante, os sinais se propagam causalmente e sem também a presença de um big smash (ou big rip).

Existe um outro modelo, também de campo fantasma denominado phantom matter, que oposto ao primeiro, produziria uma superdesaceleração em algum momento no futuro conduzindo a uma parada na expansão, e logo após o universo começaria a se contrair em direção a um Big Crunch. Nos artigos [4,5] Solá e Opher propuzeram solucionar o problema da coincidência introduzindo um modelo denominado X Λ CDM, onde X não precisa ser necessariamente um campo escalar. A equação de estado deste modelo pode ser do tipo quintessência ou fantasma dependendo da interação entre as componentes X e Λ . Como um Λ constante traz problemas com teoria quântica de campos, ela deve ser variável. Como já foi mencionado, não é possível resolver o problema da coincidência através do modelo Λ CDM padrão pois neste caso a razão $r = \frac{\rho_D}{\rho_m}$ varia de 0 a ∞ . Modelos Λ CDM com Λ variável também não solucionam o problema da coincidência segundo a referência [4]. Porém, no caso X Λ CDM a matéria se conserva isoladamente e a interação ocorre apenas entre X e Λ . Existem 3 possibilidades neste modelo,

(i) se $\omega_X \geq -1$ (tipo quintessência) e $\Omega_X^0 > 0$, então a expansão do universo pode cessar contanto que $\Omega_\Lambda < 0$. Neste caso existe um momento no futuro em que $H = 0$.

(ii) caso fantasma padrão em que $\omega_X \leq -1$ e $\Omega_X^0 > 0$. Neste caso a densidade de energia escura aumenta indefinidamente com a expansão e não importa se Ω_Λ é positiva ou negativa, pois de qualquer forma o universo passará por uma fase superacelerada de finita duração até se romper em pedacos e se auto destruir [4]. Por isso, este modelo é denominado de singularidade Big Rip.

(iii) Outro caso fantasma ocorre se $\omega_X \leq -1$ e $\Omega_X^0 < 0$. Agora o cosmon, que poderia ser um campo escalar segundo a referência [4], colabora com a matéria devido o seu efeito gravitacional ao contrário do caso Big Rip, criando assim uma super desaceleração na expansão do universo até ele finalmente parar de expandir (stopping point) e começar a se contrair. Isto só pode ocorrer se $\Omega_\Lambda^0 > 0$ [5]. Este caso particular de campo fantasma conhecido como phantom matter possui densidade de energia do cosmon negativa, o que não é novidade na literatura [46]. Segundo [5] o phantom matter satisfaz a condição de energia forte ao contrário do campo fantasma padrão que viola todas as condições clássica de energia. Nesta teoria a razão $r = \frac{\rho_D}{\rho_m}$ varia de aproximadamente 0.1 no período da nucleossíntese primordial até um valor em torno de 10 no futuro. Logo após o universo para de expandir, em $a = a_* > 1$ ou $H(a_*) = 0$, e começa a se contrair em direção a um Big Crunch. Portanto, a probabilidade de vivermos em um universo com $r \approx 1$ é essencialmente 1 neste modelo denominado phantom matter, uma variante do campo fantasma.

No artigo [38], ocorre um modelo de energia escura baseado na teoria de cordas, com termo cinético negativo no referencial de Einstein, portanto do tipo fantasma, porém sem problema de estabilidade. Também a energia fantasma não é a única que tem o parâmetro da equação de estado < -1 ; outro modelo denominado branas (será discutido adiante) possui $w_{ef} < -1$ hoje, mas não conduz a um Big Rip no futuro [1].

2.2.5 GÁS DE CHAPLYGIN

Outra possibilidade para a energia escura é o gás de Chaplygin cuja equação de estado obedece a regra

$$p_c = -\frac{A}{\rho_c}. \quad (2.75)$$

Pela equação da conservação da energia

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + 3p) = 0 \quad (2.76)$$

e equação de estado (2.75), onde a é o fator de escala, surge a seguinte relação para ρ_c :

$$\rho_c = \sqrt{A + \frac{B}{a^6}}, \quad (2.77)$$

na qual B é uma constante de integração. O gás de Chaplygin procede como matéria sem pressão em tempos remotos e como constante cosmológica no futuro. O parâmetro de Hubble em um universo contendo matéria escura fria (CDM) e gás de Chaplygin é dado por

$$H(z) = H_0 \left[\Omega_m(1+z)^3 + \frac{\Omega_m}{k} \sqrt{\frac{A}{B} + (1+z)^6} \right]^{1/2}, \quad (2.78)$$

onde $k = \frac{\rho_{m0}}{\sqrt{B}}$. Por (2.78), $k = \frac{\rho_{m0}}{\rho_c}$ quando $z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1}$ tende ao infinito. O parâmetro z é a diferença entre o comprimento da onda de luz recebido e o emitido dividido pelo comprimento da onda emitido. A relação entre A e B é dada por

$$A = \left\{ k^2 \left(\frac{1 - \Omega_m}{\Omega_m} \right)^2 - 1 \right\}. \quad (2.79)$$

O gás de Chaplygin pode ser derivado de 2 lagrangeanos distintos:

1) da densidade do lagrangeano da quintessência (2.68) com o potencial [1]

$$V(\phi) = \frac{\sqrt{A}}{2} \left(\cosh 3\phi + \frac{1}{\cosh 3\phi} \right), \quad (2.80)$$

2) e também pode ser derivado a partir da densidade do lagrangeano de Born-Infeld

$$L = -V_0 \sqrt{1 - \phi_{,\mu} \phi^{,\mu}} \quad (2.81)$$

Para $\phi_{,\mu}$ tipo tempo, a quadrivelocidade pode ser definida por

$$u^\mu = \frac{\phi^{,\mu}}{\sqrt{\phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha}}} \quad (2.82)$$

que conduz tensor momento energia padrão

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad (2.83)$$

onde [59]

$$\rho = \frac{V_0}{\sqrt{1 - \phi_{,\mu} \phi^{,\mu}}} \quad (2.84)$$

e

$$p = -V_0 \sqrt{1 - \phi_{,\mu} \phi^{,\mu}}. \quad (2.85)$$

Portanto, a equação (2.75) foi reencontrada, com $A = V_0^2$. Devido o gás de Chaplygin interpolar entre a matéria escura (CDM) e o termo Λ , existe a possibilidade do gás de Chaplygin fornecer os conceitos para um modelo unificado de matéria escura e energia escura. Em contraste com CDM e bárions, a velocidade do som no gás de Chaplygin $v_c = \sqrt{\frac{dp_c}{d\rho_c}} = \frac{\sqrt{A}}{\rho_c}$ cresce rapidamente com t^2 durante o regime dominado pela matéria e se torna da ordem da velocidade da luz no presente e se aproxima à velocidade da luz assintoticamente no futuro distante [1]. Um gás de Chaplygin generalizado foi proposto com $p \propto -1/\rho^\alpha$ [1]. O parâmetro da equação de estado neste caso é dado por

$$\omega(a) = -\frac{|\omega_0|}{\left[|\omega_0| + \frac{1-|\omega_0|}{a^{3(1+\alpha)}}\right]} \quad (2.86)$$

que interpola entre $\omega = 0$ em tempos remotos ($a \ll 1$) e $\omega = -1$ no futuro ($a \gg 1$); ω_0 seria o atual parâmetro de estado para $a = 1$. A constante α regula o parâmetro $\omega(a)$. Dados de supernovas, WMAP, e de estruturas em larga escala foram usados para testar o gás de Chaplygin [1]. Na referência [32] se discute o espectro de potência no gás de Chaplygin.

2.2.6 MODELO BRANAS

Inspirada no cenário de Randall-Sundrum [1], a cosmologia braneworld sugere que poderíamos estar vivendo numa ‘brana’ de três dimensões que estaria contida em um volume(bulk) de dimensões maiores (geralmente quatro). De acordo com tal esquema todos campos de matéria estão confinados na brana, e o gráviton está livre para propagar tanto nela como no bulk. A equação do campo escalar é dada por

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \quad (2.87)$$

A equação análoga à de Friedman em 4 dimensões, na brana é dada por [1]

$$H^2 = \frac{8\pi}{3m^2}\rho \left(1 + \frac{\rho}{2\sigma}\right) + \frac{\Lambda_4}{3} + \frac{\zeta}{a^4}, \quad (2.88)$$

onde a densidade de matéria na brana é dada por

$$\rho = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \quad (2.89)$$

e ζ é uma constante de integração. A tensão brana σ fornece a relação entre a massa de Planck quadridimensional (m) e a massa de Planck pentadimensional (M).

$$m = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left(\frac{M^3}{\sqrt{\sigma}} \right). \quad (2.90)$$

σ também relaciona a constante cosmológica quadridimensional Λ_4 à constante cosmológica pentadimenssional Λ_b através

$$\Lambda_4 = \frac{4\pi}{M^3} \left(\Lambda_b + \frac{4\pi}{3M^3} \sigma^2 \right). \quad (2.91)$$

Existem outras variantes deste modelo, como por exemplo o proposto por Deffayet, Dvali e Gabadadze chamado de DDG.

Capítulo 3

TEORIA ALTERNATIVA DE GRAVITAÇÃO

3.1 PARADIGMA MOND

Uma maneira alternativa de compreender o problema das curvas planas de rotação de galáxias, sem invocar a presença de matéria escura em volta das galáxias, é o de alterar a gravidade Newtoniana. Os primeiros modelos empíricos enfatizavam uma modificação da gravitação em largas escalas, mas Milgrom demonstrou que para um modelo ser consistente, a modificação deveria ocorrer a partir de uma escala aceleração e não a partir de uma escala distância [12]. A primeira proposta satisfatória, na forma de uma lei empírica, em modificar a dinâmica Newtoniana foi feita por Milgrom no início dos anos 80 e ficou conhecida como MOND (Modified Newtonian Dynamics), na qual a dinâmica Newtoniana deve ser modificada nas regiões onde a aceleração das partículas testes que se encontram na periferia das galáxias é menor que $a_0 \approx 10^{-8} \text{ cm/s}^2$. a_0 é uma constante com dimensão de aceleração. O MOND prediz que a familiar igualdade entre a aceleração \vec{a} da partícula teste e o campo Newtoniano \vec{g}_N não se mantém necessariamente [40]. A relação proposta por Milgrom foi:

$$\mu\left(\frac{|\vec{a}|}{a_0}\right)\vec{a} = \vec{g}_N, \quad (3.1)$$

sendo que $\vec{g}_N = -\vec{\nabla}\Phi_N$ é o campo gravitacional convencional, Φ_N é o potencial Newtoniano, e μ é uma função que deve obedecer a regra abaixo:

$$\mu(x) \approx x \quad \text{se} \quad x \ll 1, \quad (3.2)$$

e

$$\mu(x) \longmapsto 1 \quad \text{se} \quad x \gg 1. \quad (3.3)$$

Milgrom estimou $a_0 \approx 10^{-8} \text{cm/s}^2$ [2]. O valor foi ajustado para reproduzir a fenomenologia das curvas planas através de uma modificação na gravidade.

Analisando as equações do MOND em seus respectivos limites, percebe-se que na escala do sistema solar, onde a aceleração é grande comparada com a_0 , a dinâmica Newtoniana é reencontrada, isto é, $\vec{a} = -\vec{\nabla}\Phi_N$ (Φ_N é o potencial Newtoniano). A modificação da gravitação Newtoniana pelo MOND é suficiente para reproduzir as curvas planas de rotação de galáxias, sem a necessidade de recorrer à postulação de uma componente invisível de matéria permeando o universo. As modificações imposta pelo MOND fazem bastante sentido nas escalas onde as acelerações das partículas testes são muito menores do que a_0 e isto ocorre principalmente na região fora do visível, isto é, além da periferia de galáxias espirais.

No caso das galáxias elípticas gigantes, não há geralmente presença de curvas de rotação planas e, portanto não há necessidade de se inferir matéria escura. Para o MOND estas galáxias podem muito bem serem descritas pela dinâmica Newtoniana, já que as acelerações das partículas testes excedem a_0 mesmo a grandes distâncias da periferia deste tipo de galáxia. Por isso, as modificações previstas pelo MOND não fazem sentido nas galáxias elíticas gigantes.

O MOND não é uma teoria, mas sim uma formulação empírica para que uma teoria relativística consistente se reduza à sua regra no limite apropriado. O modelo também está de acordo com a lei de Tully-Fisher [11], que é uma correlação entre a luminosidade infravermelha de um disco de galáxia de massa M e a velocidade de rotação de uma partícula teste de massa m na região plana da curva de rotação, como será mostrado adiante. Nas escalas em que a aceleração da partícula $|\vec{a}|$ é muito menor do que a_0 , a dinâmica é modificada de acordo com as regras do MOND . Portanto, $\mu(x) \approx x$ e

$$\mu(x) |\vec{a}| = |\vec{g}_N|, \quad (3.4)$$

$$\frac{|\vec{a}|^2}{a_0} \approx \frac{GM}{r^2}. \quad (3.5)$$

Ao isolar a aceleração \vec{a} encontra-se [2]:

$$|\vec{a}| = \left(\frac{GM a_0}{r^2} \right)^{1/2}. \quad (3.6)$$

A equação acima define exatamente a aceleração que a partícula (estrela, nuvens de hidrogênio) deve sofrer além da periferia da galáxia. Como a aceleração centrípeta é dada por $\frac{V_c^2}{r}$, então junto com a eq.(3.6) obtém-se:

$$m \frac{V_c^2}{r} = m \frac{(GMa_0)^{1/2}}{r} \quad (3.7)$$

que acarreta imediatamente ao resultado:

$$M = \frac{V_c^4}{Ga_0}. \quad (3.8)$$

Dividindo a equação acima por M encontra-se [40]:

$$1 = \frac{V_c^4}{M Ga_0}. \quad (3.9)$$

Multiplica-se os dois lados acima por L_H que é a luminosidade no infravermelho [2, 40], e

$$L_H = \frac{L_H V_c^4}{M Ga_0} \quad (3.10)$$

que é o mesmo que

$$L_H = \frac{V_c^4}{\frac{M}{L_H} Ga_0}. \quad (3.11)$$

E como a razão $\gamma = \frac{M}{L_H}$ é constante, a relação de Tully-Fisher é encontrada:

$$L_H \propto V^4. \quad (3.12)$$

A incrível concordância da eq.(3.12) com a lei de T.F (2.9) mostra que o modelo bariônico obtém mais sucesso que o de matéria escura [12]. Por outro lado, agrupamentos de galáxias parecem possuir cerca de 2 ou mais quantidade de matéria do que a observada em qualquer forma (gases quentes que emitem raio X e galáxias do aglomerado) [12]. Por este ponto de vista o MOND apenas melhorou o problema da massa faltante, portanto deve existir uma quantidade ainda não detectada, seja na forma de bárions dificilmente observados por equipamentos óticos, ou na forma de neutrinos massivos [3, 12].

Para os casos em que a aceleração sofrida pela partícula for muito menor do que a_0 , isto é, além da periferia da galáxia Tem-se:

$$\frac{|\vec{g}|^2}{a_0} = |\vec{g}_N|. \quad (3.13)$$

Logo pela equação (3.6) temos

$$|\vec{g}| = \frac{(MGa_0)^{1/2}}{r}. \quad (3.14)$$

Utilizando a relação $\vec{\nabla}\Phi = -\vec{g}$ e a equação acima, obtém-se o potencial gravitacional modificado para regiões de baixa aceleração. Para isto basta uma pequena integração, eo resultado é um potencial logarítmico que predomina na região plana da curva de rotação:

$$\Phi(r) = (MGa_0)^{1/2} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right). \quad (3.15)$$

Como o MOND não é derivado de lagrangeano, as leis de conservação não são respeitadas. Percebe-se que a equação (3.1) não pode ser verdadeira, pois, a partir dela não há conservação do momento linear, angular e da energia. Outro problema é que o princípio de equivalência fraco não é verificado [12, 40]. Também a dinâmica interna de um sistema em queda livre na presença de um campo constante é diferente da dinâmica interna deste mesmo sistema na ausência de campo externo. Claramente isto corresponde a uma violação do princípio de equivalência forte.

Em conclusão, a hipótese da validade dinâmica Newtoniana em todas as escalas implica necessariamente na existência de grande quantidade de matéria escura, uma quantidade nunca detectada. Por outro lado, uma modificação na gravitação pode explicar as curvas planas de rotação de galáxias eliminando natualmente a necessidade de se recorrer aquilo que não se mede e não se vê.

3.2 AQUAL

Embora bem sucedido empiricamente ao descrever o movimento de partículas testes (como por exemplo estrela ao redor de uma galáxia ou galáxia ao redor de aglomerados de galáxias), a fórmula do MOND $\mu(|\vec{a}|/a_0)\vec{a} = \vec{g}_N$ não está totalmente correta por não provir de um lagrangeano [2, 12, 40]. É fácil checar que em um par de partículas onde uma acelera no campo da outra, o momento não é conservado se utilizarmos a fórmula do MOND [2]. Considere um sistema binário [12] com massas m_1 e m_2 evoluindo sob somente suas gravidades. A derivada temporal de $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$ calculado pela fórmula do MOND não zera em geral se pelo menos uma das acelerações for da mesma ordem ou menor do que a_0 [12], desde que os μ 's geralmente não sejam iguais. Por isso, pela fórmula do MOND o momento não é conservado. Também não conserva momento angular nem energia e consequentemente o

MOND não pode ser considerado uma teoria [2, 12]. Uma reformulação do MOND derivado de lagrangeano foi realizada a fim de garantir as leis de conservação (energia, momento linear, momento angular. Ao contrário do MOND, o princípio de equivalência fraco, que afirma que todos os objetos se movem da mesma forma em um campo gravitacional, é satisfeito na nova formulação [2, 40]. A teoria é chamada de AQUAL (AQUAdratic Lagrangian), e seu lagrangeano é dado por [40]:

$$L = -\frac{a_0^2}{8\pi G} \tilde{f}\left(\frac{a^2}{a_0^2}\right) - \rho\Phi, \quad (3.16)$$

onde Φ é o verdadeiro potencial, $\vec{a} = -\vec{\nabla}\Phi$ é a aceleração sofrida pela partícula teste, e ρ é a densidade da matéria total. A partir do lagrangeano acima encontra-se a equação de Poisson modificada que assume a forma:

$$\vec{\nabla} \left[\tilde{\mu}\left(\frac{|\vec{\nabla}\Phi|}{a_0}\right) \vec{\nabla}\Phi \right] = 4\pi G\rho \quad (3.17)$$

e

$$\tilde{\mu}(\sqrt{y}) = d\tilde{f}(y)/dy. \quad (3.18)$$

A regra é $\tilde{f}(y) \mapsto y$ se $y \gg 1$, e $\tilde{f}(y) \mapsto \frac{2}{3}y^{3/2}$ se $y \ll 1$. A equação de Poisson na sua forma original é dada por:

$$\vec{\nabla}\vec{\nabla}\Phi_N = 4\pi G\rho \quad (3.19)$$

na qual Φ_N é o potencial Newtoniano.

Por (3.17) e (3.19) encontramos:

$$\vec{\nabla} \left[\tilde{\mu}\left(\frac{|\vec{\nabla}\Phi|}{a_0}\right) \vec{\nabla}\Phi - \vec{\nabla}\Phi_N \right] = 0, \quad (3.20)$$

logo [40],

$$\tilde{\mu}\left(\frac{|\vec{a}|}{a_0}\right)\vec{a} = -\vec{\nabla}\Phi_N + \vec{\nabla} \times \vec{h}. \quad (3.21)$$

Isto é verdadeiro pois $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ sempre, para um vetor \vec{F} qualquer. A correção $\vec{\nabla} \times \vec{h}$ garante as leis de conservação [40]. Milgrom mostrou através de cálculos numéricos que nas regiões internas \vec{h} contribui com somente 10 a 15% da aceleração [40]. Nos casos de simetria esférica $\vec{h} = 0$, e a fórmula do AQUAL (3.21) se reduz exatamente na fórmula do MOND $\mu(|\vec{a}|/a_0)\vec{a} = -\vec{\nabla}\Phi_N$. A equação do AQUAL (3.21) ao contrário da do MOND respeita o princípio de equivalência fraco. Em conclusão o AQUAL cura os problemas de não conservação do MOND. Por isso, o MOND pode ser visto como uma aproximação do AQUAL.

3.3 TEORIAS RELATIVÍSTICAS

3.3.1 REQUISITOS PARA UMA TEORIA RELATIVÍSTICA TIPO MOND

Para que o MOND seja uma descrição fenomenológica viável [2], ele deve estar coberto por uma teoria relativística que se reduza a ele nos limites apropriados. Neste contexto a teoria relativística deve satisfazer determinados princípios e requerimentos. A seguir vamos discutir os dois casos.

A) PRINCÍPIOS

1) *PRINCÍPIO DA AÇÃO*: A teoria deve ser derivável do princípio da ação, pois é a única maneira conhecida para garantir a necessária conservação do momento linear, momento angular, e conservação da energia. A ação é a integral sobre a densidade do lagrangeano

2) *INVARIÂNCIA RELATIVÍSTICA*:

Inúmeros experimentos fornecem evidência direta para a validade universal da relatividade especial. A ação deve então ser um escalar relativístico tal que todas as equações da teoria sejam relativisticamente invariante. Isto implica que a teoria reduz-se à relatividade especial quando a gravitação é desprezível. Desta forma excluimos teorias com referencial preferencial.

3) *PRINCÍPIO DA EQUIVALÊNCIA*:

Como foi demonstrado com grande precisão (1 parte em 10^{12}) pela experiência de Eotvos-Dicke, partículas livres em queda livre seguem trajetórias universais. Então a massa inercial é igual a massa gravitacional, e o princípio de equivalência fraco é satisfeito

4) *CAUSALIDADE*:

Não é permitido propagação superluminal, isto é, não pode haver velocidade de qualquer campo mensurável, de energia, de momento linear, e de momento angular maior do que a velocidade da luz. Desta forma não haverá quebra da causalidade.

5) *POSITIVIDADE DA ENERGIA*:

Segundo a referência [2], campos nunca podem carregar energia negativa. Do ponto de vista quântico é uma precaução contra instabilidade de vácuo. A densidade de energia de cada campo deve ser não negativa em cada evento, isto é denominado positividade local.

6) *ABANDONO DA DINÂMICA NEWTONIANA*:

A teoria deve exibir uma escala preferencial de aceleração, abaixo da qual há um abandono da dinâmica Newtoniana.

B) REQUERIMENTOS

Uma teoria relativística que contenha o MOND deve prever de forma satisfatória diversos fenômenos que já estão bem estabelecidos, que serão mencionados abaixo.

1) ACORDO COM FENOMENOLOGIA EXTRA GALÁTICA:

O limite não relativístico da teoria deve fazer previsões que estão em acordo com as do AQUAL .

2) ACORDO COM LENTES GRAVITACIONAIS:

A teoria deve prever corretamente o desvio da luz que são responsáveis pela formação de lentes gravitacionais e arcos. A teoria deve fazer previsões do desvio da luz similar ao previsto pela relatividade geral utilizando matéria escura. Isto é estabelecido pelo TeVeS.

3) CONCORDÂNCIA COM EXPERIMENTOS SOLARES:

A teoria alternativa de gravitação deve estar em acordo com a relatividade geral nos diversos testes solares como desvio da luz, tempo de atraso de sinais, precessão do periélio de planetas entre outros.

3.3.2 REFERENCIAL DE JORDAN E REFERENCIAL DE EINSTEIN

O fenômeno da inércia, segundo o princípio de Mach, deve surgir a partir de acelerações com respeito à distribuição da massa geral do universo. Se isto for verdade a massa inercial não seria constante e, conseqüentemente ela diferiria da massa gravitacional. Neste caso o princípio de equivalência fraco perderia o seu sentido [8]. Em 1961 Brans e Dicke [7] criaram uma teoria não acoplando o campo escalar ϕ à matéria e mantendo a massa inercial idêntica à massa gravitacional. Nesta formulação a constante gravitacional passa a variar de acordo com o campo escalar ϕ [8], e a massa permanece intacta. Pouco tempo depois a teoria foi reformulada mantendo a constante gravitacional intacta, e variando a massa. Para isso, o campo escalar ϕ foi acoplado à matéria e não à gravidade. No primeiro caso a teoria foi descrita no referencial de Jordan, também chamado de referencial físico, e no segundo no referencial de Einstein. A seguir os dois casos serão discutidos separadamente.

REFERENCIAL DE EINSTEIN

Neste referencial o campo escalar interage explicitamente com a matéria [29], e as trajetórias das partículas não são geodésicas da métrica de Einstein. Também a constante gravitacional G permanece constante [30], enquanto que as massas das partículas variam. O tensor

momento energia da matéria não necessariamente se conserva, e é o tensor momento energia efetivo que se conserva: $G_{;\beta}^{\alpha\beta} = 8\pi GT_{;\beta}^{ef\alpha\beta} = 0$. É neste referencial que o TeVeS foi formulado.

REFERENCIAL DE JORDAN

De forma alternativa a ação é descrita no referencial de Jordan em que a interação escalar é absorvida pela transformação conforme da métrica, e as trajetórias das partículas são geodésicas da nova métrica. Neste referencial os campos não interagem com a matéria, e o tensor momento energia da matéria sempre se conserva: $T_{m;\beta}^{\alpha\beta} = 0$ [30]. Aqui o campo escalar acopla à gravidade [29]. Também a ‘constante gravitacional’ não é constante e, portanto varia, enquanto que as massas das partículas são constantes [30]. Segundo a referência [35], a equivalência matemática entre os dois referencias não implica necessariamente em equivalência física.

Uma teoria relativística pode ser descritas em duas maneiras diferentes. Uma usando o referencial de Jordan e outra usando o referencial de Einstein. Segundo [2, 11, 12] o referencial de Jordan é aquele cujas grandezas possuem significado físico e não matemático. Desta maneira a métrica pode ser escrita tanto em um referencial quanto em outro.

A relação entre a métrica no referencial de Jordan $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ e a de Einstein $g_{\alpha\beta}$ é feita através de uma relação que é denominada transformação conforme. Nesta transformação, as duas métricas estão ligadas por uma função do campo escalar ϕ :

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = e^{2\phi} g_{\alpha\beta}. \quad (3.22)$$

Isto significa que o espaço-tempo foi localmente esticado isotropicamente em todas direções com respeito a $g_{\alpha\beta}$. A trajetória da partícula é geodésica quando escrita na métrica de Jordan e não geodésica quando escrita na métrica de Einstein. O observável é justamente a métrica de Jordan [9, 12], isto é, aquela usada para fazer medições a partir de relógios e réguas. Se $\tilde{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$, vale o princípio de equivalência forte. Porém não há experimento que verifique tal igualdade, e o princípio de equivalência forte só tem algum suporte a nível do sistema solar. A grandes distâncias a validade do princípio de equivalência forte é questionável. Para a relatividade geral tanto o princípio de equivalência fraco como o forte é satisfeito, porém somente o princípio de equivalência fraco é que é sustentado por muitos experimentos. Estes experimentos são evidentes somente para $\tilde{g}_{\alpha\beta} \neq g_{\alpha\beta}$ como acontece em largas escalas.

3.4 RAQUAL

O AQUAL decreve bem as curvas de rotação de galáxia, mas não é uma teoria relativística. A implementação de uma teoria relativística é indispensável não só para prever desvios da luz, mas permitir também a investigação de sistemas como pulsar binário e cosmologia. A nova formulação deve se comportar como o MOND no limite de baixas acelerações e como a gravidade Newtoniana quando as acelerações são grandes. A teoria também deve fazer as mesmas previsões da relatividade geral na escala do sistema solar além de prever corretamente os fortes desvios da luz sem incluir a existência de matéria escura nas galáxias.

Naturalmente o RAQUAL é derivado de um lagrangeano, e sua forma é:

$$L_\phi = -\frac{a_0^2}{8\pi G} f\left(\frac{g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}}{a_0^2}\right). \quad (3.23)$$

A partir da variação em ϕ encontra-se

$$\left[\mu \left(\frac{g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}}{a_0^2} \right) g^{\mu\nu}\phi_{,\nu} \right]_{;\mu} = -4\pi G \tilde{g}^{\alpha\beta} \tilde{T}_{\alpha\beta}, \quad (3.24)$$

onde $\mu(y) = \frac{df(y)}{dy}$. No caso de campos fracos da relatividade geral, isto é, quando o campo gravitacional é muito pequeno para produzir velocidades perto da velocidade da luz [6], a métrica é dada por :

$$g_{00} = -(1 + 2\Phi_N). \quad (3.25)$$

No RAQUAL a previsão no mesmo limite é dado pela métrica física abaixo:

$$\tilde{g}_{00} \approx -(1 + 2\Phi_N + 2\phi). \quad (3.26)$$

Neste caso o novo potencial é dado por $\Phi = \Phi_N + \phi$, e o campo escalar desenvolve o papel do potencial gravitacional da suposta matéria escura. Para sistemas quase estáticos com campos fracos a equação (3.24) tem a mesma forma da equação do AQUAL(3.17). A teoria se comporta bem ao predizer as curvas planas de rotação de galáxia e está consistente com os testes solares. Porém carrega sérios problemas, como propagação superluminal do campo ϕ . A relação conforme utilizada também não é adequada e por isso a teoria prediz aproximadamente o mesmo desvio da luz previsto pela relatividade geral se levarmos em conta apenas a matéria visível, em pleno desacordo com os fortes desvios observados.

3.5 PCG

Devido ao RAQUAL carregar consigo o problema da causalidade, isto é, a velocidade das ondas do campo escalar é maior do que a velocidade da luz no regime do MOND, Bekenstein sugeriu uma nova teoria envolvendo dois campos escalares e que ficou conhecida como PCG (Phase Coupling Gravity). Neste formalismo surge um campo escalar complexo dado por $\chi = qe^{i\phi}$ onde q e ϕ são dois campos escalares. O primeiro representa a amplitude e o segundo a fase do campo escalar χ . A teoria recebe este nome devido a matéria acoplar a fase do campo escalar complexo. A transformação conforme $\tilde{g}_{\alpha\beta} = e^{2\phi}g_{\alpha\beta}$ é mantida, onde ϕ é a fase do χ que aparece.

A ação proposta para este campo tem a forma:

$$S_\chi = -\frac{1}{2} \int (g^{\alpha\beta} \chi_{,\alpha} \chi_{,\beta} + V(\chi^* \chi)) (-g)^{1/2} d^4x. \quad (3.27)$$

O potencial $V(\chi^* \chi)$ representa a autointeração do campo escalar complexo. Em termos dos campos q e ϕ a ação acima é escrita como:

$$S_{q,\phi} = -\frac{1}{2} \int (q_{,\alpha} q^{,\alpha} + q^2 \phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha} + V(q^2)) (-g)^{1/2} d^4x. \quad (3.28)$$

Diversas versões surgem em virtude das diferentes escolhas para o potencial. O modelo mais simples é o PCG mínima $V(q^2) = 0$. A teoria melhorou o problema da causalidade quando confrontado com o RAQUAL, porém apresenta fraco desvio da luz caso não se infira matéria escura, e isto é devido a métrica física e a de Einstein estarem relacionadas por uma transformação conforme como no RAQUAL. Por fim, a precessão do periélio do Mercúrio está em conflito com a observação. Em resumo, a teoria é falha.

3.6 TEORIAS COM TRANSFORMAÇÃO DISFORME

A fim de resolver problema do desvio da luz foi sugerido trocar a transformação conforme

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = e^{-2\psi} g_{\alpha\beta} \quad (3.29)$$

pela disforme:

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = e^{-2\psi} (A g_{\alpha\beta} + B L^2 \psi_{,\alpha} \psi_{,\beta}). \quad (3.30)$$

A , B são funções do invariante $g^{\mu\nu} \psi_{,\mu} \psi_{,\nu}$, e L é uma constante. Neste caso a direção do espaço tempo colinear com $\psi_{,\alpha}$ é comprimida diferentemente nas quatro direções, por isso, a

forma da métrica é distorcida. No entanto foi visto que se insistirmos na propagação causal, que consiste na velocidade da luz ser maior do que a das ondas gravitacionais (perturbação da métrica $g_{\alpha\beta}$), o sinal requerido para B deve ser o oposto do desejado para aumentar o desvio da luz. Para que o desvio da luz aumente B tem que ser positivo [9,20], porém surge o então problema de causalidade que para ser evitado exige um B negativo [9].

Uma maneira de sair do impasse, como mencionou Sanders [61], consiste em trocar os termos $\psi_{,\alpha}\psi_{,\beta}$ por $U_\alpha U_\beta$ na equação (3.30), onde U_α é um quadri vetor constante que aponta para o tempo [9]. A introdução do campo vetorial U^α faz o truque [9]: o MOND é recuperado e o desvio da luz é aumentado para as corretas proporções mesmo para um B negativo [2, 9, 20] evitando os problemas de causalidade [2]. Esta nova transformação disforme é responsável pelo desvio extra da luz, em acordo com as observações, sem invocar a presença de matéria escura ao contrário das teorias predecessoras que falharam neste intuito. A métrica física da teoria estratificada de Sanders é dada por:

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = e^{-2\psi} g_{\alpha\beta} - 2U_\alpha U_\beta \sinh(2\psi) \quad (3.31)$$

Esta teoria de gravitação estratificada se comporta bem quando confrontada com testes do sistema solar. Todavia, a teoria precisa de um referencial prioritário [2,9,40], então ela pode ser covariante enquanto que uma teoria aceitável necessita ser covariante.

Este problema o TeVeS, que será a próxima teoria do tipo MOND a ser discutida, resolve.

3.7 TEVES

Na presente tese vamos trabalhar com uma nova teoria denominada TeVeS que significa Tensor Vector Scalar, pois possui campos gravitacionais nestas três formas. Seu objetivo principal é:

- 1) explicar as observadas curvas de rotação de galáxias sem invocar a presença de matéria escura
- 2) explicar as lentes gravitacionais e os fortes desvio da luz sem ter que apelar para a matéria escura que jamais foi detectada.

Como foi mencionado anteriormente várias teorias alternativas de gravitação foram criadas com o intuito de resolver o problema. A primeira foi o MOND seguido pelo AQUAL

e ambas não são relativísticas. Porém, é necessário uma teoria relativística. A primeira da série foi o RAQUAL que falhou em explicar o forte desvio da luz e carregava a indesejável propagação de campos superluminais, em seguida surge o PCG que melhorou o problema da causalidade, porém continuou a desviar fracamente a luz caso não se admita a existência da matéria escura. Havia também outro problema, a do conflito com a precessão do periélio de mercúrio. Em vista de tantos problemas era necessário desenvolver uma teoria mais completa e geral. O TeVeS, desenvolvido por Bekenstein, foi a primeira teoria realmente madura do tipo MOND e capaz de superar vários obstáculos e evitar diversos efeitos colaterais. Porém problemas também existem [20].

Nesta teoria, seu limite não relativístico com acelerações muito menores do que a_0 conduz ao MOND, enquanto no seu limite não relativístico com grandes acelerações em relação a a_0 , a dinâmica Newtoniana é recuperada. A teoria possui três constantes importantes: l com dimensão de comprimento, e mais duas positivas e adimensionais, k e K .

Os pontos fortes do modelo são:

- A) o TeVeS passa pelos testes usuais do sistema solar,
- B) prediz o desvio da luz de acordo com o observado sem requerer a presença da matéria escura,
- C) não exibe propagação superluminal e
- D) fornece um formalismo específico para a construção de modelos cosmológicos.

O TeVeS é baseado em quatro campos gravitacionais, sendo um tensorial, um vetorial e dois escalares descritos abaixo:

- 1) a métrica de Einstein $g_{\mu\nu}$, bem como sua inversa $g^{\mu\nu}$.
- 2) um campo quadrivetor tipo tempo U_μ tal que

$$g^{\alpha\beta}U_\alpha U_\beta = -1 \quad (3.32)$$

- 3) um campo escalar dinâmico ϕ adimensional.

- 4) e finalmente um campo escalar não dinâmico σ com dimensão igual à de $\frac{1}{G^{1/2}}$

A métrica física do TeVeS, como na teoria estratificada de Sanders, é obtida esticando a métrica de Einstein na direção do espaço tempo ortogonal a $U^\alpha = g^{\alpha\beta}U_\beta$ por um fator $e^{-2\phi}$ enquanto encolhe pelo mesmo fator na direção paralela a U^α :

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = e^{-2\phi}(g_{\alpha\beta} + U_\alpha U_\beta) - e^{2\phi}U_\alpha U_\beta \quad (3.33)$$

ou de forma equivalente,

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = e^{-2\phi} g_{\alpha\beta} - 2U_\alpha U_\beta \sinh(2\phi) \quad (3.34)$$

A métrica física inversa é dada por:

$$\tilde{g}^{\alpha\beta} = e^{2\phi} g^{\alpha\beta} + 2U^\alpha U^\beta \sinh(2\phi) \quad (3.35)$$

onde $U^\alpha = g^{\alpha\beta} U_\beta$.

3.7.1 FUNDAMENTOS DO TEVES:

A) Ações

Nesta teoria existem 4 ações que serão discutida a seguir. A primeira é devido a parte geométrica e é idêntica à ação da relatividade geral:

$$S_g = (16\pi G)^{-1} \int g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} (-g)^{1/2} d^4x. \quad (3.36)$$

O termo g é o determinante de $g_{\alpha\beta}$ que é a métrica no referencial de Einstein.

A segunda ação é devido aos campos escalares:

$$S_s = -\frac{1}{2} \int [\sigma^2 h^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} + \frac{1}{2} G l^{-2} \sigma^4 F(kG\sigma^2)] (-g)^{1/2} d^4x, \quad (3.37)$$

onde o termo $h^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - U^\alpha U^\beta$ é introduzido para eliminar a propagação superluminal do campo ϕ [2, 9] devido a presença do campo vetorial [2], sob a condição $\phi > 0$. F é uma função adimensional livre [2]. Além do mais, dois parâmetros constantes são introduzidos: k que não tem dimensão, e l que tem dimensão de comprimento. O termo $\sigma^2 U^\alpha U^\beta \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta}$ foi incluído na ação escalar para impedir a propagação superluminal do campo ϕ [2]. A propagação superluminal era um dos grandes problemas que assolava o RAQUAL. A terceira ação provém do campo vetorial U^α :

$$S_v = -\frac{K}{32\pi G} \int [g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} U_{[\alpha,\mu]} U_{[\beta,\mu]} - 2(\lambda/K)(g^{\mu\nu} U_\mu U_\nu + 1)] (-g)^{1/2} d^4x. \quad (3.38)$$

O par de índices entre colchetes é devido a antisimetrização:

$$U_{[\alpha,\mu]} = U_{\alpha;\mu} - U_{\mu;\alpha}. \quad (3.39)$$

O novo parâmetro K introduzido é uma constante de acoplamento adimensional desde que U^α também seja adimensional. λ é um multiplicador de Lagrange dependente do

espaco-tempo para forçar a normalização [9] do campo U^α , e que é determinada assim que as equações são resolvidas. A variação em λ dá justamente a relação $g^{\alpha\beta}U_\alpha U_\beta = -1$ mencionada anteriormente [17]. Resumindo:

F = função sem dimensão,

ϕ = campo escalar dinâmico sem dimensão,

σ^2 = campo escalar não dinâmico com dimensão do inverso da constante gravitacional newtoniana,

U^α = campo vetorial sem dimensão,

λ é o multiplicador de Lagrange que depende do espaco-tempo

k = constante sem dimensão,

K = constante de acoplamento sem dimensão,

l = constante com dimensão de comprimento.

A quarta e última ação é a da matéria:

$$S_m = \int L(\tilde{g}_{\mu\nu})(-\tilde{g})^{1/2} d^4x. \quad (3.40)$$

É importante conhecer a relação entre \tilde{g} (determinante de $\tilde{g}_{\alpha\beta}$) e g (determinante de $g_{\alpha\beta}$). Para isto multiplicamos a métrica física pela de Einstein:

$$\begin{aligned} \tilde{g}^{\mu\nu} g_{\nu\alpha} &= [e^{2\phi} g^{\mu\nu} + 2g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} U_\alpha U_\beta \sinh(2\phi)] g_{\nu\mu} \\ &= e^{2\phi} \delta_\alpha^\mu + 2U_\mu U_\nu g_{\mu\alpha} \sinh(2\phi) \\ &= \delta_\alpha^\mu e^{2\phi} + 2U^\mu U_\alpha \left(\frac{e^{2\phi} - e^{-2\phi}}{2} \right) \\ &= e^{2\phi} [\delta_\alpha^\mu + U^\mu U_\alpha (1 - e^{-4\phi})], \end{aligned} \quad (3.41)$$

então como U^α só tem componente temporal, a relação do determinante de \tilde{g} e g é

$$\tilde{g}^{-1} g = \det[e^{2\phi} I + e^{2\phi} U^0 U_0 (1 - e^{-4\phi})], \quad (3.42)$$

onde I é a matriz unitária.

Após algumas algebras elementares encontramos

$$\sqrt{-\tilde{g}} = e^{-2\phi} \sqrt{-g}. \quad (3.43)$$

B) EQUAÇÕES BÁSICAS

Uma relação fundamental para se encontrar as equações de campo e de Einstein modificada é derivada da relação (3.35). Após realizadas as devidas variações nesta equação encontramos:

$$\delta\tilde{g}^{\alpha\beta} = e^{2\phi} \delta g^{\alpha\beta} + [g^{\alpha\beta} e^{2\phi} + 2U^\alpha U^\beta \cosh(2\phi)] \delta\phi + \quad (3.44)$$

$$+2 \sinh(2\phi) [\delta g^{\mu(\alpha} U^{\beta)} U_\mu] + \\ +2 \sinh(2\phi) [U^{(\alpha} g^{\beta)\mu} \delta U_\mu]$$

Os parênteses indicam relação de simetrização:

$$U^{(\alpha} g^{\beta)\mu} \delta U_\mu = (g^{\alpha\mu} U^\beta + g^{\beta\mu} U^\alpha) \delta U_\mu \quad (3.45)$$

A equação (3.45) será fundamental para encontrar as equações de campo e de Einstein modificada a partir da relação abaixo:

$$\tilde{T}_{\alpha\beta} = \frac{2}{\sqrt{-\tilde{g}}} \frac{\delta(\sqrt{-\tilde{g}} L^m)}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} \quad (3.46)$$

Após realizadas as variações em $g^{\alpha\beta}$, σ , ϕ e U_α a quatro equações fundamentais da teoria serão descritas separadamente.

B1) EQUACÃO DE EINSTEIN MODIFICADA

Para se encontrar a equação de Einstein modificada no referencial de Einstein deve-se fazer a variação em $g^{\alpha\beta}$. O resultado final é:

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi G [\tilde{T}_{\alpha\beta} + (1 - e^{-4\phi}) U^\mu \tilde{T}_{\mu(\alpha} U_{\beta)} + \tau_{\alpha\beta}] + \theta_{\alpha\beta}, \quad (3.47)$$

onde

$$\tau_{\alpha\beta} \equiv \sigma^2 \left[\phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} g_{\alpha\beta} - U^\mu \phi_{,\mu} (U_{(\alpha} \phi_{,\beta)} - \frac{1}{2} U^\nu \phi_{,\nu} g_{\alpha\beta}) \right] - \\ - \frac{1}{4} G l^{-2} \sigma^4 F(k G \sigma^2) g_{\alpha\beta} \quad (3.48)$$

$$\theta_{\alpha\beta} \equiv K \left(g^{\mu\nu} U_{[\mu,\beta]} U_{[\nu,\beta]} - \frac{1}{4} g^{\sigma\tau} g^{\mu\nu} U_{[\sigma,\mu]} U_{[\tau,\nu]} g_{\alpha\beta} \right) - \lambda U_\alpha U_\beta \quad (3.49)$$

B2) EQUACÃO DO CAMPO ESCALAR σ

A equação de σ pode ser escrita de forma mais compacta e prática a partir de uma redefinição de variável como é feito abaixo:

$$-\mu F(\mu) - \frac{1}{2} \mu^2 F'(\mu) = y, \quad (3.50)$$

onde

$$\mu = kG\sigma^2 \quad (3.51)$$

e $\mu = \mu(kl^2 h^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta})$. O termo $h^{\alpha\beta}$ é definido como

$$h^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - U^\alpha U^\beta. \quad (3.52)$$

Finalmente a variável y é dada por

$$y = kl^2 h^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta}. \quad (3.53)$$

B3 - EQUAÇÃO DO CAMPO ESCALAR ϕ

A partir deste campo escalar é encontrada a equação

$$[\mu h^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha}]_{;\beta} = kG [g^{\alpha\beta} + (1 + e^{-4\phi}) u^\alpha U^\beta] \tilde{T}_{\alpha\beta}. \quad (3.54)$$

O tensor momento energia é dado por [2]

$$\tilde{T}_{\alpha\beta} = \tilde{\rho} \tilde{u}_\alpha \tilde{u}_\beta + \tilde{p} (\tilde{g}_{\alpha\beta} + \tilde{u}_\alpha \tilde{u}_\beta), \quad (3.55)$$

onde $\tilde{\rho}$ é a densidade de energia própria, \tilde{p} é a pressão, e \tilde{u}_α é a quadrivelocidade [2]. A teoria também prevê a relação abaixo

$$\tilde{u}_\alpha = e^\phi U_\alpha. \quad (3.56)$$

Usando (3.56) e (3.55) surge a relação:

$$\tilde{T}_{\alpha\beta} = \tilde{\rho} (e^\phi U_\alpha) (e^\phi U_\beta) + \tilde{p} e^{-2\phi} (g_{\alpha\beta} + U_\alpha U_\beta). \quad (3.57)$$

Unindo a condição (3.54) e (3.55) encontra-se:

$$[\mu h^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha}]_{;\beta} = kG [g^{\alpha\beta} + (1 + e^{-4\phi}) u^\alpha U^\beta] [\tilde{\rho} \tilde{u}_\alpha \tilde{u}_\beta + \tilde{p} (\tilde{g}_{\alpha\beta} + \tilde{u}_\alpha \tilde{u}_\beta)]. \quad (3.58)$$

Por (3.56), de $g^{\alpha\beta} U_\alpha U_\beta = -1$ e (3.58), a equação do campo ϕ (3.54) é reescrita na forma abaixo :

$$[\mu h^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha}]_{;\beta} = kG [\tilde{\rho} + 3\tilde{p}] e^{-2\phi}. \quad (3.59)$$

Esta equação é de uso tanto para sistemas quase estáticos quanto para cosmologia [2].

B₄) EQUACÃO DO CAMPO VETORIAL U_α

Fazendo a variação em U_α surge a equação

$$KU_{;\beta}^{[\alpha;\beta]} + \lambda U^\alpha + 8\pi G \sigma^2 U^\beta \phi_{,\beta} g^{\alpha\gamma} \phi_{,\gamma} = 8\pi G (1 - e^{-4\phi}) g^{\alpha\mu} U^\beta \tilde{T}_{\mu\beta}. \quad (3.60)$$

λ é o multiplicador de Lagrange e é determinado assim que as equações são resolvidas [9].

C) ESCOLHA DE $F(\mu)$

Há grande liberdade na escolha de $F(\mu)$ ou $y(\mu)$. A função $y(\mu)$ proposta por Bekentein [2] possui a seguinte forma :

$$y = \frac{3}{4} \frac{\mu^2(\mu - 2)^2}{1 - \mu}. \quad (3.61)$$

À medida que $y(\mu)$ varre de 0 a ∞ , μ aumenta de 0 à unidade. A presença de μ^2 na equação acima garante que a teoria possui o MOND como limite [2]. Uma importante característica desta escolha de $y(\mu)$ é que para pequeno y , $\mu \propto \sqrt{y}$, e para grandes valores de y temos $\mu \mapsto 1$ [40].

A partir do y acima e integrando a equação (3.50) encontramos:

$$F = \frac{3}{8} \frac{\mu(4 + 2\mu - 4\mu^2 + \mu^3 + 2\ln[(1 - \mu)^2])}{\mu^2}. \quad (3.62)$$

Para F menor do que 0 e consequentemente μ variando de 0 a 1 estamos no limite de sistema quase estático, enquanto que para F maior do que 0 e μ maior do que 2 entramos no domínio cosmológico. Vale a pena reafirmar que há grande liberdade na escolha de F , e que cada escolha define uma nova teoria distinta [9].

D) RELATIVIDADE GERAL COMO LIMITE

Uma das razões para acreditar que o TeVeS é uma teoria consistente, é mostrando que em pequenas escalas como a do sistema solar, ela se comporta da mesma maneira que a relatividade geral. A teoria possui três parâmetros: k , l e K , e no limite em que $k \mapsto 0$, $l \propto k^{-3/2}$, $K \propto k$ e $l \mapsto \infty$ a teoria se funde naturalmente à relatividade geral para qualquer forma de F desde que se faça uma troca de variáveis $\phi \mapsto \phi_* \equiv l\phi$, $\sigma \mapsto \sigma_* \equiv \sqrt{k}\sigma$. Assim quando $l \mapsto \infty$, a ação escalar desaparece e ϕ_* desacopla da teoria [2]. Quando $K \mapsto 0$ a ação vetorial S_v desaparece, e também $\lambda \mapsto 0$ [2, 40]. Então a equação de Einstein modificada se reduz na relatividade geral [2], e a métrica física se torna idêntica à métrica de Einstein [2, 40].

E)LIMITE NÃO RELATIVÍSTICO

O limite não relativístico ocorre em sistemas quase estáticos que são caracterizados pelo fato da energia potencial gravitacional de uma partícula (estrela ou galáxia) ser muito menor do que a sua massa de repouso. Portanto, os campos gravitacionais são muito fracos para produzirem velocidades próximas à da luz [2]. Nestes sistemas quase estáticos podemos desprezar as derivadas temporais em comparação com as espaciais.

Para fazer a aproximação não relativística do TeVeS, é necessário a equação de campo do campo vetorial U^α (3.60) para calcular λ . Depois introduzimos este valor nas equações linearizadas de Einstein, e descartamos $\tau_{\alpha\beta}$ e $\theta_{\alpha\beta}$ (com exceção de λ). O resultado final é a métrica física para sistemas quase estáticos dada por [2, 9, 40]:

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = -(1 + 2\Phi)dt^2 + (1 - 2\Phi)\delta_{ij}dx^i dx^j, \quad (3.63)$$

onde o potencial é escrito como,

$$\Phi = \Xi\Phi_N + \phi \quad (3.64)$$

Onde Φ é o potencial total , Φ_N o potencial gravitacional Newtoniano devido a matéria bariônica [9] , e ϕ é o campo escalar que desenvolve o papel do potencial da matéria escura. Aquantidade Ξ é uma constante próximo da unidade dada por [9, 40]:

$$\Xi \equiv e^{-2\phi_c}(1 + K/2)^{-1}, \quad (3.65)$$

onde ϕ_c é um valor assintótico de ϕ [40], e Ξ deve possuir um valor próximo da unidade [9, 40]. Nesta teoria a métrica de Einstein no limite de campos fracos se comporta de uma maneira um pouco diferente da relatividade geral, isto é, o TeVeS introduz uma pequena correção na métrica e que deve ser escrita na seguinte forma [40]:

$$g_{00} \approx -(1 + 2\Xi\Phi_N) \quad (3.66)$$

Observe que o fator multiplicativo não é exatamente 2 como na relatividade geral. A métrica física, por sua vez, possui a forma

$$\tilde{g}_{00} \approx -(1 + 2\Phi) \quad (3.67)$$

que pode ser escrita como

$$\tilde{g}_{00} \approx -(1 + 2\Xi\Phi_N + 2\phi). \quad (3.68)$$

A equação do campo ϕ para o caso estático esfericamente simétrico com a matéria representada pelo fluido (3.55) e usando a equação do campo ϕ (3.54) encontramos

$$\vec{\nabla} \left[\mu \left(kl^2 (\vec{\nabla} \phi)^2 \right) \vec{\nabla} \phi \right] = kG\tilde{\rho}. \quad (3.69)$$

Em sistemas quase-estáticos $h^{\alpha\beta} \mapsto g^{\alpha\beta}$, e a equação (3.54) se reduz à (3.69) que tem a mesma estrutura da equação do AQUAL [2]. Seja a equação de Poisson na nomenclatura TeVeS:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \Phi_N = 4\pi G\tilde{\rho} \quad (3.70)$$

Comparando as duas equações acima vemos que:

$$\vec{\nabla} \phi = (k/4\pi\mu) \vec{\nabla} \Phi_N \quad (3.71)$$

Vamos agora calcular $\vec{\nabla} \Phi$ a partir da equação $\Phi = \Xi \Phi_N + \phi$ que nos dá:

$$\tilde{\mu} \vec{\nabla} \Phi = \vec{\nabla} \Phi_N \quad (3.72)$$

onde

$$\tilde{\mu} = (\Xi + k/4\pi\mu)^{-1} \quad (3.73)$$

A equação (3.72) é precisamente a equação do MOND visto que a aceleração da partícula teste é dada por $\vec{a} = -\vec{\nabla} \Phi$. A partir da relação (3.69) μ é visto como função de $|\vec{\nabla} \phi|$, e consequentemente por (3.73) e (3.72) $\tilde{\mu}$ pode ser escrito como função de $|\vec{\nabla} \Phi|$, exatamente tipo o formato do MOND [40]. Vamos examinar dois casos distintos e opostos, primeiro analisaremos o caso de campos mais fracos, isto é, para $\mu \ll 1$ que é justamente a região que predomina o MOND puro com simetria esférica. Em seguida analisaremos o comportamento do TeVeS no limite $\mu \longrightarrow 1$ que corresponde ao limite de alta aceleração.

CASO A) LIMITE MOND ($\mu \ll 1$): SIMETRIA ESFÉRICA

O valor de $y = kl^2 h^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta}$ proposto por Bekenstein é dado por (3.61), e no limite em que $\mu \ll 1$ obtemos $y \approx 3\mu^2$. Então,

$$\mu \approx (k/3)^{1/2} l |\vec{\nabla} \phi| \quad (3.74)$$

Usando a relação acima em (3.71), (3.72) e (3.73) para eliminar $|\vec{\nabla} \Phi_N|$ e $|\vec{\nabla} \phi|$ obtemos:

$$\mu = (k/8\pi\Xi) \left(-1 + \sqrt{1 + 4 |\vec{\nabla} \Phi| / a_0} \right) \quad (3.75)$$

onde a_0 é uma constante com dimensão de aceleração dada por [40]

$$a_0 \equiv (3k)^{1/2}(4\pi\Xi l)^{-1} \quad (3.76)$$

Foi escolhido $\mu > 0$, e a expressão (3.75) só é válida para $\mu \ll 1$ [40]. Assumindo $k \ll 1$ isto será verdadeiro quando $|\vec{\nabla}\Phi| \ll a_0$. Neste caso $\mu \approx (k/4\pi\Xi)|\vec{\nabla}\Phi|/a_0$. Porém por (3.72) temos $\tilde{\mu} \approx \Xi^{-1}|\vec{\nabla}\Phi|/a_0$. Portanto assumindo k muito pequeno e usando as equações (3.75) e (3.76) obtemos:

$$|\vec{\nabla}\Phi|\vec{\nabla}\Phi/a_0 = \Xi\vec{\nabla}\Phi_N \quad (3.77)$$

Se identificarmos a_0 da equação (3.76) com a constante de Milgrom [40], então estamos precisamente no caso $|\vec{a}| \ll a_0$. A presença de Ξ na equação (3.77) mostra que o TeVeS faz uma correção no MOND puro, mesmo que muito pequena. Desta forma o TeVeS, que é uma teoria relativística, cobre a descrição fenomenológica do MOND no limite de baixas acelerações e por isso se sai muito bem.

CASO B) LIMITE NEWTONIANO: SIMETRIA ESFÉRICA

Vamos considerar a partir de agora o outro caso extremo, isto é, para $\mu \approx 1$ que dá origem a $y = kl^2|\vec{\nabla}\phi|^2 \gg 1$. por (3.73) temos

$$\tilde{\mu} \approx (\Xi + k/4\pi)^{-1} \quad (3.78)$$

Portanto por (3.72) e a equação acima é encontrado que :

$$\vec{\nabla}\Phi = (\Xi + k/4\pi)\vec{\nabla}\Phi_N \quad (3.79)$$

Como $k \ll 1$ e Ξ é próximo da unidade, a aceleração da partícula teste (estrela ao redor da galáxia) $\vec{a} = \vec{\nabla}\Phi$ [40] tem a forma Newtoniana no limite $\mu \approx 1$. Em Consequência de (3.79) obtemos:

$$G_N = (\Xi + k/4\pi)G \quad (3.80)$$

analisando a equação acima é visto que o TeVeS faz uma correção na constante gravitacional, isto é, o TeVeS é equivalente à dinâmica Newtoniana, mas com o valor da constante gravitacional ‘normalizada’ [2]. Como $k \ll 1$ e Ξ é bem próximo da unidade, a modificação é muito pequena. Por exemplo se $k = 0,03$ há um aumento fracional de $5,3 \times 10^{-9}$ no campo gravitacional Newtoniano do sol na órbita da terra, o qual é

$|\vec{\nabla}\Phi| = 0,59\text{cms}^{-2}$. Não há como medir as diferenças das predições, no limite Newtoniano, do TeVeS com as da dinâmica de Newton, pelo menos nos dias atuais. Para a órbita de Saturno $|\vec{\nabla}\Phi| = 0,0065\text{cms}^{-2}$, e a correção fracional é de $4,3 \times 10^{-5}$. Isto corresponde a um aumento na aceleração de $2 \times 10^{-7}\text{cms}^{-2}$. Novamente não podemos dizer se a previsão Newtoniana está mais próxima da realidade do que o TeVeS e vice versa. Concluimos esta seção fazendo a observação que pela relação (3.79), $\vec{a} \approx \vec{g}_N$, e $a \gg a_0$ para o limite $\mu \approx 1$. Neste limite O TeVeS cobre com tranquilidade a dinâmica Newtoniana.

C) REGIÃO INTERMEDIÁRIA PARA $0 < \mu < 1$

Nos casos em que $\mu \ll 1$ e $\mu \approx 1$ a teoria se reduz ao MOND puro [40], desde que seja adotado o caso particular de simetria esférica [2], como foi feito nos itens A) e B) analisados acima. Mas quando μ possui um valor intermediário, o TeVeS produz correções no MOND [40]. Neste regime Φ_N e ϕ fazem contribuições similares para Φ . No presente caso as predições do TeVeS satisfazem a equação de Poisson modificada do AQUAL [40], pois esta teoria carrega o termo extra $\vec{\nabla} \times \vec{h}$ que também é responsável pelos casos onde não há simetria esférica, e a equação de Poisson original. Por isso em geral Φ não é exatamente uma solução do MOND puro. É mencionado por Bekenstein [40] que existem realmente aglomerados de galáxias cuja dinâmica não é bem descrita pelo MOND puro, e um possível motivo é que deva existir uma certa quantidade de matéria escura nestes aglomerados.

F) CORREÇÕES RELATIVÍSTICAS NO TEVES

Os testes dentro do sistema solar têm sido usados frequentemente para aceitar ou descartar as novas teorias gravitacionais que competem com a relatividade geral. A métrica de Sghwarzschild em coordenadas isotrópicas é

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}dx^\alpha d^\beta = -e^{\tilde{\nu}}dt^2 + e^{\tilde{\xi}}[d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] \quad (3.81)$$

$$e^{\tilde{\nu}} = 1 - 2G_N\rho^{-1} + 2\beta G_N^2 m^2 \rho^{-2} + 0(\rho^{-3}) \quad (3.82)$$

$$e^{\tilde{\xi}} = 1 + 2\gamma G_N m \rho^{-1} + 0(\rho^{-2}) \quad (3.83)$$

Aqui m é a massa física do Sol, e G_N a constante gravitacional Newtoniana. γ está relacionada com a deflexão da luz e o sinal de radar "time delay", enquanto que β está relacionada à precessão do periélio de vários planetas.

O objetivo é calcular as correções da métrica de Schwarzschild que descreve a solução exterior de uma massa m e determinar os parâmetros "post-Newtonian" do TeVeS e comparar

com a relatividade geral. O primeiro estágio consiste em escrever a métrica de Einstein esfericamente simétrica e estática do sol (interior e exterior) em analogia com a equação (3.81):

$$g_{\alpha\beta}dx^\alpha d^\beta = -e^\nu dt^2 + e^\xi[d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] \quad (3.84)$$

Com $\nu = \nu(\rho)$ e $\xi = \xi(\rho)$ Fora do sol as funções da métrica podem ser expandidas na forma:

$$e^\nu = 1 - r_g/\rho + \alpha_2(r_g/\rho)^2 + \dots \quad (3.85)$$

$$e^\xi = 1 - \beta_1 r_g/\rho + \beta_2(r_g/\rho)^2 + \dots \quad (3.86)$$

O r_g tem dimensão de comprimento e precisa ser determinado. A simetria e renormalização sugere que

$$U^\alpha = (e^{\nu/2}, 0, 0, 0). \quad (3.87)$$

Com esta equação resolvemos a equação escalar para obtemos

$$\phi(\rho) = \phi_c - \frac{kGm_s}{4\pi\rho} + 0(\rho^{-3}), \quad (3.88)$$

onde ϕ_c é o valor assintótico de ϕ , e m_s é a massa escalar dada por

$$m_s = 4\pi \int_0^R (\tilde{\rho} + 3\tilde{p})e^{\nu/2+3\xi/2-2\phi}\rho^2 d\rho, \quad (3.89)$$

onde R é o raio do sol. Pelo fato do fluido ser não relativístico $\tilde{p} \ll \tilde{\rho}$, então m_s deve estar muito próximo da massa Newtoniana. m_s e a apropriada massa gravitacional m_g diferem por uma fração de apenas 10^{-5} [2] no interior do sistema solar. Em seguida vamos calcular as componentes G_t^t e G_ρ^ρ da equação de Einstein modificada usando séries de potências, para determinar os coeficientes:

$$\beta_1 = 1 \quad (3.90)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \quad (3.91)$$

$$\beta_2 = \frac{3}{8} + \frac{K}{16} - \frac{kG^2 m_s^2}{8\pi r_g^2} \quad (3.92)$$

O próximo passo é encontrar as soluções interior e exterior para e^ξ na superfície do sol cujo procedimento determina que:

$$r_g = 2Gm_g + 0(r_g^2/R) \quad (3.93)$$

onde novamente R é o raio do sol e m_g é uma integral sobre as variáveis τ_{tt} e θ_{tt} , que concorda com a expressão para a massa do sol m com precisão fracional de 10^{-5} [40]. Sua massa observável(física) é dada por

$$m = (G/G_N)(m_g + \frac{km_s}{4\pi}). \quad (3.94)$$

Finalmente usamos as relações (3.33), (3.87) e (3.88) para calcular a métrica física. O resultado final é [40]

$$\gamma = 1, \quad \beta = 1 \quad (3.95)$$

que podem ser introduzidos em (3.81), (3.82) e (3.83).

Concluindo, os valores β e γ são iguais a 1 tanto para a R.G quanto para o TeVeS. Portanto, não é possível optar por uma teoria ou outra em vista da precisão dos aparelhos de medidas atuais.

G) LENTES GRAVITACIONAIS DE ACORDO COM O TEVES :

As lentes gravitacionais surgem devido a formação de imagens através do desvio da luz, e em muitos casos é observado fortes desvios da luz cuja causa não poderia ser apenas pela presença da matéria luminosa. Se levarmos em conta a presença de grande quantidade de matéria escura nas galáxias e aglomerados de galáxias, então a relatividade geral é um excelente instrumento teórico para fazer previsões do desvio da luz e está em concordância com a observação. Na seção anterior foi calculado o desvio da luz no regime Newtoniano (altas acelerações) do TeVes. Nesta seção será verificado como o TeVeS prediz o desvio da luz no regime MOND (baixas acelerações). Vamos trabalhar com a teoria linearizada

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \bar{h}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{\gamma\delta}\bar{h}_{\gamma\delta} \quad (3.96)$$

que satisfaz a condição de gauge

$$\eta^{\beta\delta}\partial_\beta\bar{h}_{\gamma\delta} = 0. \quad (3.97)$$

Então o tensor de Einstein para $0(h)$ se torna

$$G_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\eta^{\gamma\delta}\partial_\gamma\partial_\delta\bar{h}_{\alpha\beta}. \quad (3.98)$$

Unindo esta equação com a de Einstein modificada encontramos

$$\eta^{\gamma\delta}\partial_\gamma\partial_\delta\bar{h}_{\alpha\beta} = -16\pi G[\tilde{T}_{\alpha\beta} + (1 - e^{-4\phi})u^\mu\tilde{T}_{\mu(\alpha}U_{\beta)} + \tau_{\alpha\beta}] - 2\theta_{\alpha\beta}. \quad (3.99)$$

Galáxias e agrupamentos de galáxias são sistemas em repouso (sua estrutura não varia com o tempo ao contrário do caso cosmológico) e, por isso podemos desprezar as derivadas temporais de $\bar{h}_{\alpha\beta}$; da mesma forma desprezamos os tensores quadráticos $\tau_{\alpha\beta}$ e $\theta_{\alpha\beta}$ com exceção do termo $-\lambda U_\alpha U_\beta$ que não é ostensivamente pequeno. O λ é calculado a partir da equação do campo U^α (3.60) depois de negligenciar os termos ϕ . Para $\tilde{T}_{\alpha\beta}$ utilizamos a equação do fluido perfeito:

$$\tilde{T}_{\alpha\beta} = \tilde{\rho}\tilde{u}_\alpha\tilde{u}_\beta + \tilde{p}(\tilde{g}_{\alpha\beta} + \tilde{u}_\alpha\tilde{u}_\beta). \quad (3.100)$$

O resultado final é $\bar{h}_{tt} = -4\Xi\Phi_N$ onde Φ_N provém da equação de Poisson com $\tilde{\rho}$ como fonte, e Ξ é uma constante próximo da unidade como já foi definido antes. No caso não relativístico $\tilde{p} \ll \tilde{\rho}$, então podemos fazer $\bar{h}_{ij} \approx 0$ e $h_{ti} \approx 0$. Logo,

$$g_{\alpha\beta} = (1 - 2\Xi\Phi_N)\eta_{\alpha\beta} - 4\Xi\Phi_N\delta_\alpha^t\delta_\beta^t. \quad (3.101)$$

Por (3.101)

$$g_{00} \approx -(1 + 2\Xi\Phi_N). \quad (3.102)$$

Ao se usar a equação (3.33), que relaciona a métrica física com a de Einstein, junto com (3.102), encontra-se

$$\tilde{g}_{00} \approx -(1 + 2\Xi\Phi_N + 2\phi). \quad (3.103)$$

A métrica física, por sua vez, adquire a forma

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = -(1 + 2\Phi)dt^2 + (1 - 2\Phi)\delta_{ij}dx^i dx^j, \quad (3.104)$$

onde $\Phi = \Xi\Phi_N + \phi$. A métrica acima tem o mesmo formato da métrica de campos fracos da R.G.. No TeVeS o potencial Φ é responsável não só pela dinâmica das galáxias, mas também pelas lentes gravitacionais. A equação (3.104) pode ser descrita pela R.G. se Φ for

proveniente da equação de Poisson caso seja incluso matéria escura na fonte, enquanto no TeVeS Φ_N e ϕ aparecem no potencial Φ , e a fonte é devido apenas a matéria visível. Como no RAQUAL, o campo escalar ϕ desempenha o mesmo papel do potencial gravitacional da matéria escura caso a R.G seja a teoria adotada. Concluindo, as predições do TeVeS (no limite de baixas acelerações para as lentes gravitacionais são as mesmas da relatividade geral se incluirmos matéria escura, e ambas estão em acordo com a observação. Portanto, ao contrário de suas predecessoras como RAQUAL e PCG, o TeVeS descreve com sucesso as observadas lentes gravitacionais. Este tópico é apenas uma generalização da questão do desvio da luz já discutido anteriormente, a diferença consiste que neste caso foi tratado sistemas no regime MOND (baixas acelerações) e na seção anterior foi realizado um tratamento para o regime Newtoniano (altas acelerações) como já foi mencionado.

H) CAUSALIDADE

A transformação disforme usada no TeVeS resolve o problema da causalidade e, portanto não há propagação superluminal de ondas gravitacionais. Os detalhes já foram explicados anteriormente. Também na ação escalar, a presença do vetor U^α elimina a possibilidade de propagação superluminal do campo escalar. Esta discussão já foi tratada ao se apresentar a ação escalar anteriormente. Outra condição, a fim de evitar qualquer tipo de problema de causalidade é supor que o campo ϕ deva ser maior do que zero [2].

3.7.2 EQUAÇÕES COSMOLÓGICAS DO TEVES

Vamos reescrever as equações de campo e de Einstein modificada para o caso cosmológico, na qual as variáveis dependem do tempo, mas não das coordenadas espaciais já que o universo é homogêneo e isotrópico em largas escalas. Neste caso o campo vetorial é dado por

$$U^\alpha = \delta_t^\alpha \quad (3.105)$$

A métrica usada é a de Robertson Walker pois o universo é homogêneo e isotrópico

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -dt^2 + a(t)^2 \left[dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]. \quad (3.106)$$

Esta é a métrica no referencial de Einstein. Por outro lado, através de

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = e^{-2\phi} g_{\alpha\beta} - 2U_\alpha U_\beta \sinh(2\phi) \quad (3.107)$$

podemos calcular a métrica física, ou seja, aquela formada por grandezas que realmente podemos medir. Como $U^\alpha = \delta_t^\alpha$, então pela relação (3.107) temos

$$\tilde{g}_{00} = -e^{2\phi} \quad (3.108)$$

e

$$\tilde{g}_{ii} = a^2 e^{-2\phi}. \quad (3.109)$$

A partir de (3.108) e (3.109) a métrica física é escrita na forma

$$\begin{aligned} d\tilde{s}^2 &= \tilde{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -(e^\phi dt)^2 + \\ & (e^{-\phi} a(t))^2 \left[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] = \\ & -d\tilde{t}^2 + \tilde{a}(\tilde{t})^2 \left[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]. \end{aligned} \quad (3.110)$$

Portanto por (3.108), (3.109) e (3.111) surgem as importantes relações

$$d\tilde{t} = e^\phi dt, \quad \tilde{a}(\tilde{t}) = e^{-\phi} a(t). \quad (3.111)$$

Embora estejamos trabalhando no referencial de Einstein e utilizando as variáveis a e t , elas não possuem nenhum significado físico [11]. O próximo passo consiste em encontrar as equações cosmológicas. Ao multiplicar (3.55) por U^α obtemos

$$\begin{aligned} U^\alpha \tilde{T}_{\alpha\beta} &= U^\beta [\tilde{\rho} \tilde{u}_\alpha \tilde{u}_\beta + \tilde{p} [e^{-2\phi} (g_{\alpha\beta} + U_\alpha U_\beta)] = \\ & \tilde{\rho} U^\beta \tilde{u}_\beta \tilde{u}_\alpha + \tilde{p} e^{-2\phi} [g_{\alpha\beta} U^\beta + U^\beta U_\beta U_\alpha]. \end{aligned} \quad (3.112)$$

Utilizando a relação $g^{\alpha\beta} U_\alpha U_\beta = -1$, a equação acima pode ser escrita como

$$U^\beta \tilde{T}_{\alpha\beta} = \tilde{\rho} U^\beta (e^\phi U_\beta) \tilde{u}_\alpha. \quad (3.113)$$

E como $\tilde{u}_\beta = e^\phi U_\beta$ [2], então

$$U^\beta \tilde{T}_{\alpha\beta} = -\tilde{\rho} e^{2\phi} U_\alpha. \quad (3.114)$$

Ao unir (3.114) com (3.60) e adotando $U^\alpha = \delta_t^\alpha$ encontramos a equação cosmológica geral do campo vetorial U^α

$$\lambda = 8\pi G[\sigma^2 \dot{\phi}^2 - 2\tilde{\rho} \sinh(2\phi)]. \quad (3.115)$$

A partir de (3.47) e usando (3.115) para eliminar λ , encontramos a equação de Einstein modificada para a componente temporal:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \tilde{\rho} e^{-2\phi} + \frac{8\pi G}{3} \sigma^2 \dot{\phi}^2 + \frac{2\pi}{3} \frac{\mu^2 F(\mu)}{k^2 l^2} \quad (3.116)$$

ou de forma equivalente,

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G \tilde{\rho} e^{-2\phi}}{3} + \frac{4\pi}{3k^2 l^2} [-y\mu + \frac{\mu^2 F\mu}{2}]. \quad (3.117)$$

Para a componente espacial temos

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi G \left[-\tilde{p} e^{-2\phi} - \dot{\phi}^2 \sigma^2 + \frac{G\sigma^4 F(kG\sigma^2)}{4l^2} \right]. \quad (3.118)$$

Por (3.50) encontramos a equação cosmológica do campo escalar σ , onde $\mu = kG\sigma^2$:

$$2kl^2 \dot{\phi}^2 = \mu F(\mu) + \frac{1}{2} \mu^2 F'(\mu). \quad (3.119)$$

Por último (3.54) fornece a equação cosmológica do campo ϕ :

$$\mu \dot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a} \mu \dot{\phi} + \mu \ddot{\phi} = -\frac{kGe^{-2\phi}}{2} [\tilde{\rho} + 3\tilde{p}]. \quad (3.120)$$

A eq.(3.116) pode ser reescrita com o auxílio de $\mu = kG\sigma^2$ e se torna

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi G \left[\tilde{\rho} e^{-2\phi} + \frac{\mu}{kG} \dot{\phi}^2 + \frac{\mu^2 F(\mu)}{4Gk^2 l^2} \right], \quad (3.121)$$

onde a densidade de energia efetiva é dada por:

$$\rho_{ef} = \tilde{\rho} e^{-2\phi} + \frac{\mu}{kG} \dot{\phi}^2 + \frac{\mu^2 F(\mu)}{4Gk^2 l^2} \quad (3.122)$$

que leva à equação

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_{ef}. \quad (3.123)$$

A componente espacial da equação de Einstein modificada (3.118) pode também ser reescrita em função de μ :

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -8\pi G \left[\tilde{p}e^{-2\phi} + \dot{\phi}^2 \frac{\mu}{kG} - \frac{\mu^2 F(\mu)}{4l^2 k^2 G} \right]. \quad (3.124)$$

Portanto, a pressão efetiva é dada por

$$p_{ef} = \tilde{p} \exp[-2\phi] + \frac{\mu}{kG} \dot{\phi}^2 - \frac{\mu^2}{4k^2 l^2 G} F(\mu). \quad (3.125)$$

Assim (3.124) em (3.125) nos dá

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -8\pi G p_{ef}. \quad (3.126)$$

Por (3.57) e (3.105) obtemos:

$$\tilde{T}_{00} = \tilde{\rho}(e^\phi U_0)(e^\phi U_0) + \tilde{p}e^{-2\phi}(g_{00} + U_0 U_0) = \tilde{\rho}e^{2\phi} \quad (3.127)$$

ou

$$\tilde{T}_{00} = \rho_m = \tilde{\rho}e^{2\phi}. \quad (3.128)$$

Da mesma forma para a componente espacial do tensor momento energia da matéria temos

$$\tilde{T}_{xx} = \tilde{\rho}(e^\phi U_x)(e^\phi U_x) + \tilde{p}e^{-2\phi}(g_{xx} + U_x U_x) = \tilde{\rho}e^{-2\phi}a^2 \quad (3.129)$$

na qual novamente foi assumida a relação. Logo,

$$p_m = \tilde{p}e^{-2\phi}. \quad (3.130)$$

Como

$$\rho_{ef} = \rho_m + \rho_\phi, \quad (3.131)$$

então

$$\rho_\phi = \rho_{ef} - \rho_m. \quad (3.132)$$

Por (3.132) e (3.128) obtemos a densidade de energia do campo escalar que é dada por :

$$\rho_\phi = \tilde{\rho} [\exp[-2\phi] - \exp[2\phi]] + \frac{\mu}{kG} \dot{\phi}^2 + \frac{\mu^2}{4k^2 l^2 G} F(\mu) . \quad (3.133)$$

De forma equivalente para a pressão, temos

$$p_{ef} = p_m + p_\phi . \quad (3.134)$$

Por (3.125) é encontrada a componente pressão

$$p_\phi = \frac{\mu}{kG} \dot{\phi}^2 - \frac{\mu^2}{4k^2 l^2 G} F(\mu) . \quad (3.135)$$

As relações entre pressão e densidade de energia são dadas por

$$\tilde{p} = w \tilde{\rho} \quad (3.136)$$

e

$$p_m = w_m \rho_m , \quad (3.137)$$

onde

$$w_m = w e^{-4\phi} \quad (3.138)$$

é dado por (3.128) e (3.130). Para o campo escalar, o parâmetro da sua equação de estado é dado por

$$w_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} . \quad (3.139)$$

• CONSERVAÇÃO DA ENERGIA DENTRO DA COSMOLOGIA

Uma importante relação é [11]:

$$\dot{\tilde{\rho}} = 3 \left(\dot{\phi} - \frac{\dot{a}}{a} \right) (\tilde{\rho} + \tilde{p}) . \quad (3.140)$$

Por (3.111) derivada do fator de escala físico pelo tempo físico

$$\frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}} = e^{-2\phi} \left(-\frac{d\phi}{dt} a + \frac{da}{dt} \right) \quad (3.141)$$

que ao ser dividido por $\tilde{a}(\tilde{t})$ dá origem a

$$\tilde{H} = e^{-\phi} \left(-\frac{d\phi}{dt} + H \right). \quad (3.142)$$

A partir de (3.140), (3.111) e (3.142) surge a equação da conservação da energia no referencial físico da componente matéria:

$$\frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{t}} = -3\tilde{H} (\tilde{\rho} + \tilde{p}). \quad (3.143)$$

É neste referencial que as variáveis podem ser medidas por meio de relógios e réguas [2]. Por outro lado, no referencial de Einstein

$$\dot{\rho}_m + 3\frac{\dot{a}}{a} (1 + w_m) \rho_m = 5\dot{\phi} \rho_m - 3w \left[\left(\frac{\dot{a}}{a} - \dot{\phi} \right) - \exp[-4\phi] \frac{\dot{a}}{a} \right] \rho_m \quad (3.144)$$

e

$$\dot{\rho}_\phi + 3\frac{\dot{a}}{a} (\rho_\phi + p_\phi) = -5\dot{\phi} \rho_m + 3w \left[\left(\frac{\dot{a}}{a} - \dot{\phi} \right) - \exp[-4\phi] \frac{\dot{a}}{a} \right] \rho_m. \quad (3.145)$$

Unindo as duas equações acima, surge a importante relação

$$\dot{\rho}_{ef} + 3\frac{\dot{a}}{a} (\rho_{ef} + p_{ef}) = 0. \quad (3.146)$$

Ainda que a relação (3.131) seja fisicamente bem motivada desde que ρ_m coincida com a componente 00 do tensor momento energia da matéria, não parece que exista uma maneira óbvia de manusear os resultados dinâmicos. Por isso, vamos considerar uma diferente decomposição na próxima seção. Concluindo, por (3.144) e (3.145) percebe-se imediatamente que no referencial de Einstein o tensor momento energia da matéria não se conserva individualmente como ocorre no referencial físico, isto é, no referencial de Einstein é o tensor momento energia efetivo $\tilde{T}_{ef}^{\alpha\beta}$ que se conserva, em pleno acordo com a expressão (3.146).

Existem trabalhos que tratam de como o TeVeS se comporta na cosmologia. Segundo a referência [3], o TeVeS pode explicar a formação de estruturas de acordo com o observado com $\Omega_\nu = 0,17$, $\Omega_b = 0,05$ e $\Omega_\Lambda = 0,78$ [3]. Neste caso haveria presença de neutrinos massivos..

Capítulo 4

SOLUÇÃO DE POTÊNCIAS NO TeVeS

4.1 INTRODUÇÃO

Devido a dificuldade de detectar a matéria escura, teorias que modificam a relatividade geral e que não necessitam de matéria escura (pelo menos em grande quantidade) têm surgido. Neste trabalho, a gravidade modificada na teoria TeVeS deve explicar a matéria escura como um fenômeno geométrico. As equações originais são escritas no referencial de Einstein e é suposto que a razão entre a densidade de energia de duas componentes, que será definida adiante, é constante. Posteriormente serão encontradas as soluções no referencial de Jordan. Enquanto que o fator de escala no referencial de Einstein é do tipo exponencial, no referencial de Jordan é do tipo potência. Após as soluções serem encontradas no referencial de Jordan, o resultado será comparado com o modelo Λ CDM. No nosso modelo a energia escura não é geometrizada. Por outro lado, o TeVeS pode geometrizar a matéria escura, mas somente na presença de uma energia escura fantasma. A componente matéria $\tilde{\rho}$ da teoria original de Bekenstein tem um significado diferente na presente teoria, e ela deve ser associada à energia escura no referencial de Jordan. As soluções do tipo potência podem somente ser consideradas como aproximações de uma determinada época, isto é, elas não podem descrever transições entre diferentes períodos. Cada fase possui um resultado particular. O objetivo deste trabalho é descobrir como o TeVeS se comporta quando a razão entre ρ_2 e ρ_1 é constante. O resultado é uma modificação da gravitação que substitui a matéria escura. Este trabalho está descrito também na referência [31].

Na seção 4.2 são encontradas as soluções no referencial de Einstein. Posteriormente na seção 4.3 será encontrada a função F , e veremos que ela é diferente da predita por Bekenstein

e será mostrado casos particulares. Na seção 4.4 se encontrará as variáveis no referencial de Jordan, em seguida na seção 4.5 se calculará o parâmetro desaceleração. Na seção 4.6 se mostrará que o TeVeS pode substituir a matéria escura através de uma modificação da gravidade. Na última seção se fará uma discussão dos resultados obtidos.

4.2 DESCRIÇÃO ALTERNATIVA DE DUAS COMPONENTES

Usando (3.122) e (3.125) podemos separar a densidade de energia efetiva em duas componentes

$$\rho_{ef} = \rho_1 + \rho_2. \quad (4.1)$$

O mesmo é feito para a pressão efetiva

$$p_{ef} = p_1 + p_2, \quad (4.2)$$

onde

$$\rho_1 = \frac{\mu}{kG} \dot{\phi}^2 + \frac{\mu^2}{4k^2 l^2 G} F(\mu) \quad (4.3)$$

e

$$\rho_2 = \tilde{\rho} e^{-2\phi}. \quad (4.4)$$

A equação acima também pode ser escrita na forma

$$\rho_2 = \rho_m \exp[-4\phi] \quad (4.5)$$

a partir de (3.128). De maneira análoga

$$p_1 = \frac{\mu}{kG} \dot{\phi}^2 - \frac{\mu^2}{4k^2 l^2 G} F(\mu) \quad (4.6)$$

e

$$p_2 = p_m = w \rho_m \exp[-4\phi]. \quad (4.7)$$

A razão entre p_2 e ρ_2 é dada por

$$\frac{p_2}{\rho_2} = \frac{\tilde{p} \exp[-2\phi]}{\tilde{\rho} \exp[-2\phi]} = \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} = w \quad (4.8)$$

que é constante. Por outro lado,

$$w_1 \equiv \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{\frac{\mu}{kG} \dot{\phi}^2 - \frac{\mu^2}{4k^2 l^2 G} F(\mu)}{\frac{\mu}{kG} \dot{\phi}^2 + \frac{\mu^2}{4k^2 l^2 G} F(\mu)} \quad (4.9)$$

não é necessariamente constante. De forma análoga às equações (3.144) e (3.145) existem duas relações que surgem devido as componentes 1 e 2 não se conservarem isoladamente:

$$\dot{\rho}_1 + 3\frac{\dot{a}}{a}(1+w_1)\rho_1 = -\dot{\phi}(1+3w)\rho_2 \quad (4.10)$$

e

$$\dot{\rho}_2 + 3\frac{\dot{a}}{a}(1+w)\rho_2 = \dot{\phi}(1+3w)\rho_2. \quad (4.11)$$

É o sistema de equações (4.10) e (4.11) que será analisado adiante. Este sistema consiste de duas componentes que estão interagindo uma com a outra. A interação é dada explicitamente pelo lado direito das equações (4.10) e (4.11); vamos resolver as soluções deste sistema sob condições especiais. A primeira condição é a de $w = \text{constante}$, como já foi mencionado. Também é assumido $w_1 = \text{constante}$. A terceira condição imposta é que razão entre as densidades de energia R também deve ser constante, a qual é definida por

$$R = \frac{\rho_2}{\rho_1}. \quad (4.12)$$

Para w constante, a equação (4.11) é resolvida imediatamente, cuja solução é

$$\rho_2 = \rho_{20} \exp[(1+3w)(\phi - \phi_0)] \left(\frac{a_i}{a}\right)^{3(1+w)}, \quad (4.13)$$

onde ϕ_0 e a_i são apenas constantes. A relação (4.13) vale sem qualquer suposição na dinâmica do campo ϕ . Integrando (3.140) encontramos a expressão para $\tilde{\rho}$:

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_0 \exp[3(1+w)(\phi - \phi_0)] \left(\frac{a_i}{a}\right)^{3(1+w)}, \quad (4.14)$$

e a partir de (4.14) e da relação $\rho_m = \tilde{\rho}e^{2\phi}$ (3.128) surge

$$\rho_m = \rho_{m0} \exp[(5+3w)(\phi - \phi_0)] \left(\frac{a_i}{a}\right)^{3(1+w)}. \quad (4.15)$$

É óbvio que \tilde{T}_{00} coincide com $\rho_m = \tilde{\rho}e^{+2\phi}$, e ρ_2 e ρ_m são diferentes e diferem por um fator que depende de ϕ . Também $\rho_\phi = \rho_{ef} - \rho_m$, proveniente da componente 00 do tensor momento energia, é diferente de ρ_1 . Portanto, as densidades de energia ρ_2 e ρ_1 não correspondem às densidades de energia de um fluido $T^{\alpha\beta}$ [11].

A partir de (4.10) e (4.12) surge

$$\frac{\dot{\rho}_1}{\rho_1} + 3\frac{\dot{a}}{a}(1+w_1) = -\dot{\phi}(1+3w)R. \quad (4.16)$$

No caso mais simples em que ambos w_1 e R são constantes, a equação (4.16) tem a solução:

$$\rho_1 = \rho_{10} e^{-(1+3w)\phi R} \left(\frac{a_i}{a} \right)^{3(1+w_1)}. \quad (4.17)$$

Combinando as equações (4.13) e (4.17) encontramos

$$R = \frac{\rho_{20}}{\rho_{10}} \frac{e^{(1+3w)\phi} \left(\frac{a_i}{a} \right)^{3(1+w)}}{e^{-(1+3w)\phi R} \left(\frac{a_i}{a} \right)^{3(1+w_1)}} = \frac{\rho_{20}}{\rho_{10}} e^{(1+3w)\phi(1+R)} \left(\frac{a_i}{a} \right)^{3(w-w_1)}. \quad (4.18)$$

Conclui-se pela relação (4.18) que no caso particular do campo escalar ϕ ser constante, e introduzindo $w = w_1$, então $R = \text{constante}$. No caso particular $w = w_1 = -1$ com ϕ constante, e por (4.13) e (4.17), então ρ_1 e ρ_2 também serão constantes, bem como ρ_{ef} . Consequentemente,

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{ef} = \text{constante}, \quad (w = w_1 = -1) \quad (4.19)$$

logo o fator de escala é dado por

$$a = m e^{\pm Ht}, \quad (4.20)$$

onde m é apenas uma constante de integração.

Pela equação cosmológica geral de ϕ

$$\mu \ddot{\phi} = -\frac{kG e^{-2\phi}}{2} [\tilde{\rho} + 3\tilde{p}] - \dot{\mu} \dot{\phi} - 3H \dot{\phi} \mu \quad (4.21)$$

e usando a relação

$$\tilde{\rho} = \rho_2 e^{2\phi}, \quad (4.22)$$

a equação cosmológica geral de ϕ pode ser escrita em função de ρ_2 , a partir das equações (4.21) e (4.22), e possui a seguinte forma:

$$(\mu \dot{\phi})' + 3H \mu \dot{\phi} = -\frac{kG}{2} (1 + 3w) \rho_2. \quad (4.23)$$

Pela equação (4.23) observamos que para ϕ constante, ρ_2 tem de ser nulo para $w \neq -1/3$. Logo, neste caso em particular $\rho_{ef} = \rho_1$. Consequentemente, nesta solução de vácuo $R = 0$.

O segundo caso mais geral consiste em manter $R = \text{constante}$, porém não necessariamente com campo ϕ constante, e é justamente este caminho que vamos seguir daqui para frente. Isto é possível através da equação (4.18), que por ser constante, origina a condição abaixo:

$$e^{(1+3w)\phi(1+R)} = a^{3(w-w_1)} \Rightarrow e^{(1+3w)\phi} = a^{3\frac{w-w_1}{1+R}}. \quad (4.24)$$

Esta relação fixa a dinâmica de ϕ e foi assumida a constante de integração $a(t = t_0) = 1$, que corresponde ao fator de escala hoje. Após esta equação ser derivada em relação ao tempo t , encontramos uma importante relação, que é consequência direta de R ser constante:

$$\dot{\phi} = 3 \frac{w - w_1}{(1 + 3w)(1 + R)} H. \quad (4.25)$$

Isto significa que se R for constante, então $\dot{\phi}$ é proporcional a H . A partir das equações (4.24), (4.17) e (4.13) a seguinte relação de proporcionalidade é encontrada:

$$\rho_1 \propto \rho_2 \propto \rho_{ef} \propto a^{-3\frac{1+w_1+R(1+w)}{1+R}}. \quad (4.26)$$

Por (3.116), segue a equação de Friedmann

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \tilde{\rho} \exp[-2\phi] + \frac{8\pi}{3k} \mu \dot{\phi}^2 + \frac{2\pi}{3k^2 l^2} \mu^2 F(\mu), \quad (4.27)$$

que pode ser escrita em termos da densidade de energia efetiva ρ_{ef}

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{ef}. \quad (4.28)$$

Como estamos no referencial de Einstein a constante gravitacional G não varia com o tempo, e com o auxílio das relações (4.26) e (4.27) encontramos:

$$H \propto \pm \sqrt{\rho_{ef}} \Rightarrow H \propto \pm a^{-\frac{3}{2} \frac{1+w_1+R(1+w)}{1+R}}. \quad (4.29)$$

Os dois sinais designam duas soluções possíveis: na primeira há expansão $H > 0$ e na segunda existe uma contração $H < 0$.

A partir da igualdade abaixo,

$$\frac{(\mu \dot{\phi} a^3)^\cdot}{a^3} = (\mu \dot{\phi})^\cdot + 3 \frac{\dot{a}}{a} \mu \dot{\phi} \quad (4.30)$$

e da relação (4.23), a equação cosmológica geral do campo ϕ pode ser escrita em termos de ρ_2 :

$$(\mu \dot{\phi} a^3)^\cdot = -\frac{kG}{2} (1 + 3w) a^3 \rho_2. \quad (4.31)$$

ou

$$\frac{d(\mu \dot{\phi} a^3)}{da} \frac{da}{dt} = \frac{-kG}{2} \rho_2 (1 + 3w) a^3 \quad (4.32)$$

obtemos então a equação de campo ϕ cosmológica geral

$$\frac{d}{da} (\mu \dot{\phi} a^3) = -\frac{kG}{2} (1 + 3w) \frac{a^2}{H} \rho_2 . \quad (4.33)$$

Por (4.29) e (4.26) temos :

$$H = H_0 a^{-\frac{3}{2} \frac{1+w_1+R(1+w)}{1+R}} , \quad \rho_2 = \rho_{20} a^{-3 \frac{1+w_1+R(1+w)}{1+R}} , \quad (4.34)$$

Ao integrar (4.33) e usando a segunda equação de (4.34) encontramos a equação de campo ϕ para o caso particular R constante:

$$\mu \dot{\phi} = -\frac{kG}{2} (1 + 3w) \frac{\rho_{20}}{H_0} \frac{1 + R}{\frac{3}{2} [1 - w_1 + R(1 - w)]} a^{-\frac{3}{2} \frac{1+w_1+R(1+w)}{1+R}} . \quad (4.35)$$

Además, levando em conta a definição de R a partir de (4.12) e usando (4.18) encontramos,

$$\rho_{ef0} = (1 + R) \rho_{10} = (1 + R) \frac{\rho_{20}}{R} \Rightarrow \rho_{20} (1 + R) = R \rho_{ef0} . \quad (4.36)$$

Por outro lado, a partir da primeira equação de (4.34)

$$a^{-\frac{3}{2} \frac{1+w_1+R(1+w)}{1+R}} = \frac{H}{H_0} , \quad (4.37)$$

onde H_0 é uma constante que representa o valor atual de H . Levando em consideração (4.36), (4.37) e o fato de

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{ef0} , \quad (4.38)$$

a equação de campo ϕ (4.35) pode ser escrita como

$$\dot{\phi} = -\frac{k}{8\pi\mu} R \frac{1 + 3w}{1 - w_1 + R(1 - w)} H . \quad (4.39)$$

Comparando a equação (4.25) com a (4.39) podemos isolar $\frac{\dot{\phi}}{H}$:

$$\frac{\dot{\phi}}{H} = -\frac{k(1 + 3w)R}{8\pi\mu(1 - w_1 + R(1 - w_1))} = \frac{3(w - w_1)}{(1 + 3w)(1 + R)} \quad (4.40)$$

que se reduz a

$$\frac{8\pi\mu}{3k} = -\frac{R}{9} \frac{(1 + R)(1 + 3w)^2}{(w - w_1)[1 - w_1 + R(1 - w)]} . \quad (4.41)$$

Esta relação implica que o parâmetro μ é constante, e naturalmente a função $F(\mu)$ também deve ser. A equação cosmológica geral do campo μ , já mencionada anteriormente, possui a forma

$$2kl^2\dot{\phi}^2 = \mu F(\mu) + \frac{1}{2}\mu^2 F(\mu)'. \quad (4.42)$$

Portanto,

$$\dot{\phi} = \text{constante}. \quad (4.43)$$

Logo, por (4.43), (4.3) e por μ ser constante, a densidade de energia ρ_1 também se torna constante. Também por (4.40), $\frac{\dot{\phi}}{H}$ é constante e, por isso

$$H = \text{constante}, \quad a \propto e^{Ht}. \quad (4.44)$$

Consequentemente, por (4.37)

$$a^{-\frac{3}{2} \frac{1+w_1+R(1+w)}{1+R}} = \text{constante} , \quad (4.45)$$

e evidentemente para a equação acima ser verdadeira em um universo que expande, é necessário que

$$1 + w_1 + R(1 + w) = 0 . \quad (4.46)$$

Então por (4.26) $\rho_2 = \text{constante}$. Portanto, $\rho_{ef} = \rho_1 + \rho_2$ deverá ser também constante. Por (4.46),

$$w_1 = -1 - R(1 + w) . \quad (4.47)$$

Introduzindo (4.47) em (4.41) encontramos a importante relação,

$$\frac{8\pi}{3} \frac{\mu}{k} = -\frac{R}{18} \frac{(1+3w)^2}{(1+w)(1+R)} . \quad (4.48)$$

Esta equação diverge para $w = R = -1$. Para $R = 0$, então $\mu = 0$. No limite oposto $R \gg 1$, μ se torna independente de R . Unindo (4.47) com (4.25) obtemos:

$$\dot{\phi} = 3 \frac{1+w}{1+3w} H . \quad (4.49)$$

Esta relação serviu como condição no artigo [11], enquanto no presente trabalho a condição usada foi assumir R constante que conduziu à relação (4.49). Se $w = -1$, então $\dot{\phi} = 0$.

A relação (4.49) é independente de R ao contrário de (4.39) e (4.25). Unindo (4.48) com (4.49) encontramos

$$\frac{\mu\dot{\phi}^2}{kG} = -\frac{3}{8\pi G} \left(\frac{R}{2}\right) \left(\frac{1+w}{1+R}\right) H^2. \quad (4.50)$$

Por (4.50) podemos extrair a conclusão de que $\frac{\mu}{k}$ é somente positivo para $w < -1$. Isto é exatamente a condição que os autores de [11] obtiveram para expansão exponencial. Um valor negativo para a razão $\frac{\mu}{k}$ é obtido se $w > -1$, que gera um termo cinético negativo em (4.3), originando então a energia fantasma. Isto está consistente com (4.47), na qual $w_1 < -1$ implica $w > -1$. Então, o caráter fantasma ($w_1 < -1$) no referencial de Einstein surge com o termo cinético negativo e com $w > -1$. Ainda por (4.49), $\dot{\phi}$ e H possuem o mesmo sinal se $w > -\frac{1}{3}$ e $w < -1$. Caso tenham sinais contrários, então $-1 < w < -\frac{1}{3}$. Para $w = 0$, a teoria deve ser do tipo fantasma. Todavia, a energia fantasma ocorre no referencial de Einstein e, por isso não significa necessariamente que vivemos em um universo com campo fantasma já que é no referencial de Jordan que as grandezas são observáveis [12], isto é, aquelas que têm significado físico. Mais adiante será mostrado que mesmo com um termo cinético negativo, ρ_1 é positivo.

Soluções do tipo fantasma costumam possuir problemas de estabilidade a nível quântico [1], além de violar todas condições de energia clássica [4], como a condição de energia forte ($w_1 > -\frac{1}{3}$) e a condição de energia fraca ($w_1 > -1$) [1]. Além do mais ocorre um efeito antigravitacional muito maior do que o da constante cosmológica, que conduz à singularidade denominada big rip e a uma super aceleração do universo no futuro que o destruiria. Outro problema do caso fantasma é que a velocidade do som no meio $v = \sqrt{\left|\frac{dp}{d\rho}\right|}$ pode ser maior do que a velocidade da luz [1].

Como μ foi introduzido através de $\mu = kG\sigma^2$, um valor negativo de $\frac{\mu}{k}$ corresponde a um valor negativo de σ^2 . No caso particular em que $w_1 \equiv -1$, por (4.47), surgem 2 possibilidades: a primeira $R = 0$ simplesmente, e a segunda $w \equiv -1$ com R assumindo qualquer valor constante. Além do caso especial $w = 0$, existe outro que consiste em assumir $w_1 = 0$ (não fantômico) que implica $w < -1$ de acordo com (4.47).

Por (4.1) e (4.2), a equação de estado total pode ser escrita como

$$\frac{p_{ef}}{\rho_{ef}} = \frac{p_1 + p_2}{\rho_1 + \rho_2} = w_1 \frac{\rho_1}{\rho_{ef}} + w \frac{\rho_2}{\rho_{ef}} . \quad (4.51)$$

Por (4.36), as densidades de energia podem ser escritas na forma

$$\rho_1 = \frac{\rho_{ef}}{1 + R} \quad (4.52)$$

e

$$\rho_2 = \frac{R\rho_{ef}}{1 + R}. \quad (4.53)$$

Por (4.52), (4.53) e (4.51) a seguinte relação é obtida

$$w_{ef} = \frac{p_{ef}}{\rho_{ef}} = \frac{1}{1+R}w_1 + \frac{R}{1+R}w = -1 . \quad (4.54)$$

A equação total de estado está relacionada pelo fator -1 sempre que R for constante. Este resultado está consistente com $\rho_{ef} = \text{constante}$.

Um caso particular interessante é quando $w = 0$, desta forma a equação (4.48) passa a ser escrita como:

$$\frac{8\pi}{3} \frac{\mu}{k} = -\frac{1}{18} \frac{R}{1+R} \quad (w = 0) , \quad (4.55)$$

e o parâmetro da equação de estado da componente campo passa a ser

$$w_1 = -1 - R \quad (w = 0). \quad (4.56)$$

A relação (4.49) adquire no período dominado pela matéria a seguinte forma:

$$\dot{\phi} = 3H \quad (w = 0) . \quad (4.57)$$

Como foi visto anteriormente, H e $\dot{\phi}$ são constantes.

Existe outro caso de interesse que é o de $w_1 = 0$ e w arbitrário. Por (4.47),

$$w = -\frac{1+R}{R} \quad (w_1 = 0). \quad (4.58)$$

Então, por (4.48) e (4.58) encontramos a equação

$$\frac{8\pi}{3} \frac{\mu}{k} = \frac{1}{2} \frac{\left(1 + \frac{2}{3}R\right)^2}{1+R}, \quad (w_1 = 0). \quad (4.59)$$

Esta equação deve ser comparada com (4.55). Por (4.58) e (4.49) encontramos

$$\dot{\phi} = \frac{1}{1+2R/3}H, \quad (w_1 = 0). \quad (4.60)$$

Esta equação deve ser comparada com sua correspondente (4.57).

Por (4.5) a densidade de energia da componente m é dada por

$$\rho_m = \rho_2 e^{4\phi} \quad (4.61)$$

Se por um lado ρ_2 é constante, ρ_m definitivamente não é. Por (4.24) e (4.47) encontramos:

$$e^{\phi} = a^{3\frac{1+w}{1+3w}} . \quad (4.62)$$

Como $\dot{\phi} = \text{constante}$, então $\phi = \alpha t + B$ onde α e B são constantes. Logo, se $w = -1$ então por (4.62) $\phi = B$ que é constante. Se $w = 0$, então

$$e^{\phi} = a^3 \quad (4.63)$$

e, por isso

$$\rho_m = \rho_2 a^{12}. \quad (4.64)$$

O fator de escala a pode crescer ou decrescer, porém ele não tem nenhum significado físico [11]. É justamente o fator de escala físico $\tilde{a} = e^{-\phi} a$ e o tempo físico \tilde{t} que devemos nos preocupar [11].

4.2.1 DENSIDADE DE ENERGIA E PRESSÃO NO REFERENCIAL DE EINSTEIN

A equação de Einstein modificada no referencial de Einstein em função das componentes 1,2 é

$$3H^2 = 8\pi G(\rho_1 + \rho_2). \quad (4.65)$$

Como $\mu = kG\sigma^2$, então a equação (4.3) pode ser escrita na forma

$$\rho_1 = \sigma^2 \dot{\phi}^2 + \frac{G\sigma^4 F}{4l^2}. \quad (4.66)$$

Usando ainda a definição de R , então

$$\rho_2 = \rho_1 R. \quad (4.67)$$

Portanto, através de (4.65) e (4.67) surge a relação

$$3H^2 = 8\pi G(1 + R)\rho_1. \quad (4.68)$$

Por (4.66) e (4.68) a equação de Friedmann pode ser escrita de maneira mais compacta

$$3H^2 = 8\pi G(1 + R) \left[\sigma^2 \dot{\phi}^2 + \frac{G\sigma^4 F}{4l^2} \right]. \quad (4.69)$$

Novamente usando a definição $\mu = kG\sigma^2$, a equação (4.48) pode ser escrita na forma

$$\frac{8\pi G}{3}\sigma^2 = -\frac{R}{18} \left[\frac{(1 + 3w)^2}{(1 + w)(1 + R)} \right]. \quad (4.70)$$

Ao unir a relação (4.70) com (4.49) encontramos

$$\sigma^2 \dot{\phi}^2 = -\frac{3H^2}{2} \frac{R}{8\pi G} \frac{1+w}{1+R} \quad (4.71)$$

que nada mais é do que a equação (4.50) escrita em função de σ^2 . Usando (4.71), a equação (4.69) se reduz a

$$8\pi G \left(\frac{G}{4l^2} \right) \sigma^4 F = 3H^2 \left[\frac{1 + \frac{R(1+w)}{2}}{1+R} \right], \quad (4.72)$$

e ao eliminar $3H^2$ da equação acima através de (4.71) encontramos

$$\sigma^2 \dot{\phi}^2 = -\frac{R(1+w)}{2} \left\{ \left(\frac{G}{4l^2} \right) \sigma^4 F \frac{1}{1 + \frac{R}{2}(1+w)} \right\}. \quad (4.73)$$

Usando a combinação de (4.73) e (4.66), encontramos

$$\rho_1 = - \left(\frac{2}{R(1+w)} \right) \sigma^2 \dot{\phi}^2. \quad (4.74)$$

No caso de $w_1 = 0$ (campo não fantômico, logo $\sigma^2 > 0$), e usando (4.58) e (4.74), a densidade de energia do campo ϕ se reduz a

$$\rho_1 = 2\sigma^2 \dot{\phi}^2, \quad (w_1 = 0) \quad (w < -1). \quad (4.75)$$

$w_1 = 0$ acarreta $w < -1$ de acordo com (4.47). Para a pressão do campo escalar o princípio é o mesmo :

$$p_1 = - \left(\frac{G}{4l^2} \right) \sigma^4 F \left\{ \frac{1 + R(1+w)}{1 + \frac{R}{2}(1+w)} \right\} = 2\sigma^2 \dot{\phi}^2 \left\{ \frac{R(1+w) + 1}{R(1+w)} \right\}. \quad (4.76)$$

Por (4.71) observamos novamente que se $w < -1$ então $\sigma^2 > 0$, e no caso oposto se $w > -1$ então $\sigma^2 < 0$. Se $\sigma^2 < 0$ ocorre o caso fantasma no referencial de Einstein e ao analisar a densidade de energia ρ_1 pela relação (4.74), percebe-se que ela é sempre positiva para $\sigma^2 < 0$ e $w > -1$. No caso $\sigma^2 > 0$ e $w < -1$, ρ_1 é também sempre positivo. Na verdade, a densidade de energia ρ_1 é positiva em qualquer caso, bem como ρ_2 .

4.3 IMPLICAÇÕES DA FUNÇÃO F

O objetivo desta seção é analisar como a função F se comporta sob a condição R constante imposta anteriormente. A combinação de (4.50) com (4.69) conduz ao resultado

$$3H^2 \left[1 + \frac{R}{2} (1+w) \right] = \frac{2\pi \mu^2}{l^2 k^2} F (1+R) \quad \Rightarrow \quad \mu^2 F = \frac{l^2 k^2}{2\pi} \frac{1 + \frac{R}{2} (1+w)}{1+R} 3H^2. \quad (4.77)$$

Proseguindo, elevamos ao quadrado a equação (4.48) e a introduzimos na relação (4.77) eliminando μ^2 . O resultado final é

$$\frac{F}{3H^2} = 32 \cdot 36\pi l^2 \frac{(1+w)^2 (1+R)}{R^2 (1+3w)^4} \left[1 + \frac{R}{2} (1+w) \right] . \quad (4.78)$$

Para o caso particular de $w = 0$

$$\frac{F}{3H^2} = 32 \cdot 36\pi l^2 \frac{1+R}{R^2} \left[1 + \frac{R}{2} \right] \quad (w = 0) . \quad (4.79)$$

Através da equação cosmológica do campo μ (4.42) e da igualdade

$$(\mu^2 F(\mu))' = 2\mu F(\mu) + \mu^2 \frac{dF(\mu)}{d\mu}, \quad (4.80)$$

onde o termo (\prime) significa derivada em relação a μ , surge uma relação mais simples para a equação cosmológica geral de μ :

$$2kl^2 \dot{\phi}^2 = \frac{(\mu^2 F)'}{2}. \quad (4.81)$$

Elevando ao quadrado (4.49) e eliminando $\dot{\phi}^2$ através de (4.81) encontramos:

$$(\mu^2 F)' = 36kl^2 \frac{(1+w)^2}{(1+3w)^2} H^2 . \quad (4.82)$$

O próximo passo consiste em dividir a relação acima pela (4.77) que dá como resultado a equação

$$\frac{(\mu^2 F)'}{\mu^2 F} = \frac{24\pi}{k} \frac{(1+R)(1+w)^2}{(1+3w)^2 \left[1 + \frac{R}{2} (1+w) \right]} . \quad (4.83)$$

Contudo, podemos usar a equação (4.48) para reescrever a equação acima na forma alternativa

$$\frac{(\mu^2 F)'}{\mu^2 F} = -\frac{R}{2\mu} \frac{1+w}{1 + \frac{R}{2} (1+w)} \quad (4.84)$$

cuja solução é

$$F(\mu) \propto (\mu)^{-\frac{4+3(1+w)R}{2+(1+w)R}} . \quad (4.85)$$

Novamente no caso particular $w = 0$, a relação (4.85) se reduz a

$$F \propto \mu^{-\frac{3R+4}{R+2}} \quad (w = 0) . \quad (4.86)$$

Outro caso de interesse é fazer $w_1 = 0$ (então $w < -1$ de acordo com (4.47)) e, portanto pelas equações (4.58) e (4.85) obtemos

$$F(\mu) \propto \frac{1}{\mu}, \quad (w_1 = 0). \quad (4.87)$$

Concluimos esta seção fazendo a observação de que a função F obtida neste trabalho é diferente da predita por Bekenstein, o que não é nenhum problema já que há grande liberdade na escolha desta função [9], e cada função diferente representa uma teoria diferente. No nosso caso $F(\mu)$ é constante já que μ é constante.

4.4 DINÂMICA NO REFERENCIAL DE JORDAN

As grandezas no referencial de Einstein possuem significado matemático apenas, porém no referencial de Jordan (físico) as coisas são diferentes e os resultados passam a ter significado físico, por isso a importância de passar as grandezas para este referencial.

Pelo fator de escala físico (3.111) e por (4.62) surge uma relação entre os fatores de escala no referencial de Jordan e o do referencial de Einstein:

$$\tilde{a} = a^{-\frac{2}{1+3w}}. \quad (4.88)$$

Somente para $w = -1$ é que $\tilde{a} = a$. Para o caso $w = 0$, encontramos

$$a = \frac{1}{\tilde{a}^{1/2}} \quad (w = 0). \quad (4.89)$$

Consequentemente, se o fator de escala a for crescente (decrescente), então o fator de escala físico \tilde{a} será decrescente (crescente) para $w = 0$. Isto significa que a medida que o fator de escala físico \tilde{a} aumenta, a diminui. Por outro lado, admitindo $w_1 = 0$ ao invés de w , encontramos por (4.58) e (4.88):

$$\tilde{a} = a^{\frac{1}{1+3/(2R)}}, \quad a = \tilde{a}^{(1+3/(2R))}, \quad (w_1 = 0). \quad (4.90)$$

Por (4.64) e (4.89)

$$\rho_m = \rho_2 \tilde{a}^{-6} \quad (w = 0), \quad (4.91)$$

e como

$$\tilde{\rho} = \rho_m e^{-2\phi}, \quad (4.92)$$

então

$$\tilde{\rho} = \left(\frac{\rho_2}{\tilde{a}^6} \right) e^{-2\phi} \quad (w = 0). \quad (4.93)$$

Combinando a equação acima com (4.63) e (4.89) encontra-se

$$\tilde{\rho} = \rho_2 \tilde{a}^{-3} \quad (w = 0) \quad (4.94)$$

A dependência de $\tilde{\rho} \propto \tilde{a}^{-3}$ está consistente com a equação (3.143) para $w = 0$ já que ρ_2 é constante nesta teoria. O próximo passo consiste em combinar a relação (3.142) com as equações (4.62) e (4.49) a fim de relacionar \tilde{H} com w :

$$\tilde{H} = -\frac{2}{1+3w} a^{-3\frac{1+w}{1+3w}} H. \quad (4.95)$$

Para $w > -1/3$, \tilde{H} e H possuem sinais diferentes. Um H contraindo corresponde a um \tilde{H} expandindo e vice versa. O único caso em que $\tilde{H} = H$ ocorre quando $w = -1$ e, portanto equivale a $\tilde{H} = \text{constante}$. Se $w = 0$,

$$\tilde{H} = -\frac{2H}{a^3} = -2\tilde{a}^{3/2} H, \quad (w = 0). \quad (4.96)$$

Por (4.44), H é constante nesta teoria, e para o caso particular $w = 0$, o parâmetro de Hubble físico \tilde{H} varia com $\tilde{a}^{3/2}$. Como foi discutido anteriormente, o caráter fantasma surge nesta teoria para $w > -1$, e no presente caso $w = 0$, já indicando a presença da energia fantasma no referencial de Einstein. Por outro lado se $w_1 = 0$ e w assume um valor arbitrário, então por (4.58) e (4.95)

$$\tilde{H} = \frac{1}{1+3/(2R)} a^{-1/(1+2R/3)} H, \quad (w_1 = 0). \quad (4.97)$$

Portanto neste caso, \tilde{H} e H possuem o mesmo sinal. A relação entre t e \tilde{t} em função de w é obtida combinando $d\tilde{t} = e^\phi dt$ com (4.62):

$$d\tilde{t} = a^{3\frac{1+w}{1+3w}} dt. \quad (4.98)$$

Pela relação acima $d\tilde{t}$ é igual a dt somente para $w = -1$. Como H é constante, então a solução para o fator de escala é

$$a = e^{Ht}. \quad (4.99)$$

Logo,

$$d\tilde{t} = e^{3H\frac{1+w}{1+3w}t} dt. \quad (4.100)$$

Após uma integração encontramos,

$$3H \frac{1+w}{1+3w} (\tilde{t} - \tilde{t}_i) = e^{3H \frac{1+w}{1+3w} \tilde{t}} - e^{3H \frac{1+w}{1+3w} \tilde{t}_i} . \quad (4.101)$$

Uma expressão entre \tilde{a} em termos de \tilde{t} é obtida através de (4.95) e (4.88), como é visto a seguir:

$$\tilde{H} = -\frac{2}{1+3w} \tilde{a}^{\frac{3}{2}(1+w)} H \quad \Rightarrow \quad \frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}} = -\frac{2}{1+3w} \tilde{a}^{\frac{1}{2}(5+3w)} H. \quad (4.102)$$

Como H é constante e após uma rápida integração de (4.102), obtemos

$$\tilde{a}(\tilde{t}) = \frac{\tilde{a}_i}{\left[1 + 3 \frac{1+w}{1+3w} \tilde{a}_i^{\frac{3}{2}(1+w)} H (\tilde{t} - \tilde{t}_i)\right]^{\frac{2}{3(1+w)}}} . \quad (4.103)$$

Para $H < 0$ e $w > -\frac{1}{3} \approx -0.33$, a solução (4.103) descreve um universo em expansão que se aproxima de uma singularidade após um tempo finito (big rip). Porém, a solução de big rip nesta teoria é diferente da solução de Caldwell [110]. Mais adiante será mostrado que só pode haver aceleração (veja (4.130)) se $w > -\frac{5}{3} \approx -1.66$, portanto nesta teoria um big rip ocorre em um universo acelerado, o que é bem natural. A solução $\tilde{a} \propto \tilde{t}^{-\frac{2}{3(1+w)}}$ foi encontrada antes em [11]. Novamente para o caso $w = 0$, a relação (4.103) se reduz a

$$\tilde{a} = \frac{\tilde{a}_i}{\left[1 + 3\tilde{a}_i^{\frac{3}{2}} H (\tilde{t} - \tilde{t}_i)\right]^{\frac{2}{3}}} \quad (w = 0) , \quad (4.104)$$

e, portanto a singularidade big rip ocorre em um tempo finito \tilde{t}_{br}

$$1 + 3\tilde{a}_i^{\frac{3}{2}} H (\tilde{t}_{br} - \tilde{t}_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{t}_{br} = \tilde{t}_i + \frac{1}{3\tilde{a}_i^{\frac{3}{2}} |H|} . \quad (4.105)$$

Para $w_1 = 0$, então $w < -1$ de acordo com (4.47), e pelas equações (4.58) e (4.103), o fator de escala do referencial de Jordan se torna

$$\tilde{a} = \tilde{a}_i \left[1 + \frac{1}{1+2R/3} \tilde{a}_i^{-3/(2R)} H (\tilde{t} - \tilde{t}_i)\right]^{2R/3} \quad (w_1 = 0) \quad (w < -1) . \quad (4.106)$$

A expansão acelerada requer $R > 3/2$. Não há big rip para $w_1 = 0$ ($w < -1$).

Por (4.101), t e \tilde{t} estão relacionados na forma

$$\tilde{t} \propto e^{3H \frac{1+\tilde{w}}{1+3\tilde{w}} \tilde{t}} \quad \Rightarrow \quad H\tilde{t} \propto \ln \tilde{t}^{\frac{1}{3} \frac{1+3\tilde{w}}{1+\tilde{w}}} . \quad (4.107)$$

Se por um lado o fator de escala do referencial de Einstein é do tipo exponencial ($a \propto e^{Ht}$), o fator de escala do referencial de Jordan é do tipo potência de acordo com (4.103). Outra maneira de escrever o fator de escala do referencial de Jordan, é em função do parâmetro efetivo da equação de estado

$$\tilde{a} \propto \tilde{t}^{\frac{2}{3(1+\tilde{w}_{ef})}}. \quad (4.108)$$

E por (4.103)

$$\tilde{a} \propto \tilde{t}^{-\frac{2}{3(1+w)}}. \quad (4.109)$$

Combinando (4.108) com (4.109) surge

$$\tilde{w}_{ef} = \frac{\tilde{p}_{ef}}{\tilde{\rho}_{ef}} = -2 - w \quad (4.110)$$

que é o parâmetro da equação de estado efetivo no referencial de Jordan. Por outro lado no referencial de Einstein $w_{ef} = -1$ sempre, de acordo com (4.54). Se $w = -1$, então $\tilde{w}_{ef} = -1$ também. Este resultado está em acordo com (4.95) que prevê \tilde{H} constante para $w = -1$. \tilde{p}_{ef} e $\tilde{\rho}_{ef}$ são a pressão efetiva e a densidade de energia efetiva no referencial de Jordan, e a equação de Friedmann é dada por

$$3\tilde{H}^2 = 8\pi G\tilde{\rho}_{ef}, \quad (4.111)$$

que é análoga a (4.28). Pela relação (4.110), \tilde{w}_{ef} vai ser do tipo fantômico para $w > -1$ (caso fantômico também no referencial de Einstein) e obviamente para $w = 0$. Se $\tilde{w}_{ef} = \frac{1}{3}$ do tipo radiação, então $w = -\frac{7}{3}$. No caso $w = -2$, $\tilde{w}_{ef} = 0$ do tipo matéria, e por (4.47) $w_1 = -1 + R$. Em outro caso, se $w_1 = 0$ (então obrigatoriamente $w < -1$), e combinando (4.58) com (4.110) segue

$$\tilde{w}_{ef} = -1 + \frac{1}{R} \quad (w_1 = 0). \quad (4.112)$$

No referencial de Jordan a equação da conservação da energia possui a forma

$$\frac{d\tilde{\rho}_{ef}}{d\tilde{t}} + 3\tilde{H}(1 + \tilde{w}_{ef})\tilde{\rho}_{ef} = 0, \quad (4.113)$$

onde

$$\tilde{\rho}_{ef} \propto \tilde{a}^{-3(1+\tilde{w}_{ef})}. \quad (4.114)$$

é a solução de (4.113). A equação (4.113) deve ser comparada à (3.146). Por (4.110), a equação (4.114) pode ser escrita na forma

$$\tilde{\rho}_{ef} \propto \tilde{a}^{3(1+w)}. \quad (4.115)$$

A partir de (4.110), a dinâmica no referencial de Jordan se torna bem conhecida. A relação entre \tilde{w}_{ef} e $w_{ef} = -1$ é diferente das correspondentes teorias escalares tensoriais. Compare com as equações (5.43) no referencial de Einstein e (5.64) no referencial de Jordan do próximo capítulo. Na teoria escalar tensorial, os dois referenciais estão relacionados por uma transformação conforme enquanto que no TeVeS a relação ocorre através de uma transformação disforme.

4.5 PARÂMETRO DESACELERAÇÃO

Pelas equações (3.141) e (3.111) surge

$$\frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}} = \exp[-2\phi] (\dot{a} - a\dot{\phi}) = a \exp[-2\phi] (H - \dot{\phi}) = \tilde{a} \exp[-\phi] (H - \dot{\phi}) , \quad (4.116)$$

e derivando sobre $d\tilde{t}$ a equação acima, encontramos

$$\frac{d^2\tilde{a}}{d\tilde{t}^2} = \exp[-3\phi] a (H - 2\dot{\phi}) (H - \dot{\phi}) + \exp[-3\phi] a (\dot{H} - \ddot{\phi}) . \quad (4.117)$$

Ao multiplicar ambos lados da equação acima por $\tilde{a} = ae^{-\phi}$ obtemos

$$\tilde{a} \frac{d^2\tilde{a}}{d\tilde{t}^2} = \exp[-4\phi] a^2 (H - 2\dot{\phi}) (H - \dot{\phi}) + \exp[-4\phi] a^2 (\dot{H} - \ddot{\phi}) . \quad (4.118)$$

E por (4.116)

$$\left(\frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}} \right)^2 = \exp[-4\phi] a^2 (H - \dot{\phi})^2 . \quad (4.119)$$

O parâmetro desaceleração físico é dado por

$$\tilde{q} \equiv - \frac{\tilde{a} \frac{d^2\tilde{a}}{d\tilde{t}^2}}{\left(\frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}} \right)^2} = - \frac{(H - 2\dot{\phi}) (H - \dot{\phi}) + \dot{H} - \ddot{\phi}}{(H - \dot{\phi})^2} \quad (4.120)$$

que pode ser reescrito depois de dividir o numerador e o denominador por $\frac{1}{H^2}$ na forma

$$\tilde{q} = - \frac{\left(1 - 2\frac{\dot{\phi}}{H}\right) \left(1 - \frac{\dot{\phi}}{H}\right) + \frac{\dot{H}}{H^2} - \frac{\ddot{\phi}}{H^2}}{\left(1 - \frac{\dot{\phi}}{H}\right)^2} . \quad (4.121)$$

Outra forma alternativa para o parâmetro desaceleração, é escrevê-lo em função do parâmetro da equação de estado efetivo,

$$\tilde{q} = \frac{1}{2} (1 + 3\tilde{w}_{ef}) . \quad (4.122)$$

No referencial de Eintein o valor do parâmetro desaceleração q_E é dado por

$$q_E = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}, \quad q_E = -\frac{\ddot{a}}{aH^2}. \quad (4.123)$$

Pela identidade abaixo

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 \quad (4.124)$$

e por (4.123) obtemos o parâmetro desaceleração no referencial de Einstein

$$q_E = -1 - \frac{\dot{H}}{H^2}. \quad (4.125)$$

Obviamente H é constante e, por isso $q_E = -1$. Pelas equações (4.125) e (4.121), a relação entre \tilde{q} e q_E é dada por:

$$\tilde{q} = \frac{(1 - \frac{2\dot{\phi}}{H})(1 - \frac{\dot{\phi}}{H}) - 1 - q_E - \frac{\ddot{\phi}}{H^2}}{(1 - \frac{\dot{\phi}}{H})^2} \quad (4.126)$$

ou

$$\tilde{q} = q_E - \frac{\frac{\dot{\phi}}{H} \left(1 - \frac{\dot{\phi}}{H}\right) \left(\frac{\dot{H}}{H^2} - 1\right) - \frac{1}{H} \left(\frac{\dot{\phi}}{H}\right)}{\left(1 - \frac{\dot{\phi}}{H}\right)^2}. \quad (4.127)$$

Logo, uma expansão acelerada é obtida se o numerador do lado direito da equação (4.121) for positivo, isto é:

$$\tilde{q} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(1 - 2\frac{\dot{\phi}}{H}\right) \left(1 - \frac{\dot{\phi}}{H}\right) + \frac{\dot{H}}{H^2} - \frac{\ddot{\phi}}{H^2} > 0, \quad (4.128)$$

que é equivalente a

$$2\frac{\dot{\phi}^2}{H^2} - 3\frac{\dot{\phi}}{H} - q_E - \frac{\ddot{\phi}}{H^2} > 0. \quad (4.129)$$

Portanto, pela dinâmica discutida nesta teoria ($w = \text{constante}$, $w_1 = \text{constante}$, $R = \text{constante}$ e conseqüentemente H também), temos por (4.125) $q_E = -1$. Pelas relações (4.121), (4.43), (4.44) e (4.49) encontramos o fator desaceleração físico em função de w :

$$\tilde{q} = -\frac{5 + 3w}{2}. \quad (4.130)$$

Se $w = -1$, então $\tilde{q} = -1$ em acordo também com (4.95). No referencial de Jordan, o universo só é acelerado quando $w > -\frac{5}{3}$. Se $w = 0$, o universo já é acelerado em acordo com a observação, e

$$\tilde{q} = -\frac{5}{2} \quad (w = 0). \quad (4.131)$$

Neste caso em particular, o parâmetro desaceleração não depende de R . Porém se $w_1 = 0$ (logo $w < -1$), então por (4.58) e (4.130)

$$\tilde{q} = -\left(1 - \frac{3}{2R}\right), \quad (w_1 = 0). \quad (4.132)$$

Expansão acelerada ocorre para $R > \frac{3}{2}$ em acordo com (4.106). Se $R = \frac{3}{2}$, então $\tilde{q} = 0$ que corresponde a $\tilde{w}_{ef} = -\frac{1}{3}$ (veja (4.112), (4.122)). Para $R = 1$, $\tilde{q} = \frac{1}{2}$ de acordo com (4.132). $\tilde{q} = \frac{1}{2}$ equivale a $\tilde{w}_{ef} = 0$ ou seja $w = -2$ em acordo com (4.110).

4.6 MEIO CÓSMICO

A dinâmica é totalmente determinada pelo parâmetro da equação de estado w . Se $w > -1$ então $w_1 < -1$ e pelo menos no referencial de Einstein, predomina o campo fantasma. Por outro lado, se $w < -1$, então $\tilde{w}_{ef} > -1$ (veja (4.110)). Na teoria original de Bekenstein, a densidade de energia da matéria no referencial de Jordan é dada por

$$\tilde{\rho} \propto \tilde{a}^{-3(1+w)} \quad (4.133)$$

que é solução de (3.143). Na presente teoria a interpretação de $\tilde{\rho}$ deve ser revista. Ao contrário do referencial de Einstein em que as duas componentes não se conservam (veja (4.11), (4.10)), no referencial de Jordan, entretanto, não é o caso já que $\tilde{\rho}$ se conserva de acordo com (4.133) e (3.143). O lado direito da equação de Friedmann (4.111) é formado pela densidade de energia da matéria no referencial físico e por uma segunda componente de natureza ainda desconhecida que será denominada componente y . Então a densidade de energia efetiva deve ser

$$\tilde{\rho}_{ef} = \tilde{\rho} + \tilde{\rho}_y. \quad (4.134)$$

Obviamente se $\tilde{\rho}$ se conserva, o mesmo deve acontecer com $\tilde{\rho}_y$, logo

$$\frac{d\tilde{\rho}_y}{d\tilde{t}} + (1 + \tilde{w}_y) \tilde{\rho}_y = 0, \quad (4.135)$$

onde $\tilde{\rho}_y$ é de natureza geométrica. O parâmetro da equação de estado pode ser escrito na forma

$$\tilde{w}_{ef} = w \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_{ef}} + \tilde{w}_y \frac{\tilde{\rho}_y}{\tilde{\rho}_{ef}}. \quad (4.136)$$

Introduzindo a razão

$$\tilde{r} \equiv \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_y}, \quad (4.137)$$

pode-se escrever

$$\tilde{w}_y = (1 + \tilde{r}) \tilde{w}_{\text{ef}} - \tilde{r}w \quad (4.138)$$

que não é necessariamente constante. Desde que

$$\tilde{r} = \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_{\text{ef}} - \tilde{\rho}} = \frac{\frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_{\text{ef}}}}{1 - \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_{\text{ef}}}} \quad \text{e} \quad 1 + \tilde{r} = \frac{1}{1 - \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_{\text{ef}}}} , \quad (4.139)$$

e desde que a razão $\frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_{\text{ef}}}$ seja conhecida

$$\frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_{\text{ef}}} = \tilde{\Omega}_0 \tilde{a}^{-6(1+w)} , \quad \tilde{\Omega}_0 \equiv \frac{\tilde{\rho}_0}{\tilde{\rho}_{\text{ef}0}} , \quad (4.140)$$

$$\tilde{r} = \frac{\tilde{\Omega}_0 \tilde{a}^{-6(1+w)}}{1 - \tilde{\Omega}_0 \tilde{a}^{-6(1+w)}} \quad \text{e} \quad 1 + \tilde{r} = \frac{1}{1 - \tilde{\Omega}_0 \tilde{a}^{-6(1+w)}} . \quad (4.141)$$

Através de (4.110) e (4.138) encontramos

$$\tilde{w}_y = -2 - w - 2\tilde{r}(1 + w) . \quad (4.142)$$

Em termos do fator de escala

$$\tilde{w}_y = -\frac{2 + w \left(1 + \tilde{\Omega}_0 \tilde{a}^{-6(1+w)} \right)}{1 - \tilde{\Omega}_0 \tilde{a}^{-6(1+w)}} . \quad (4.143)$$

No período tipo radiação $\tilde{w}_{\text{ef}} = \frac{1}{3}$, logo $w = -\frac{7}{3}$ e, portanto (4.143) se reduz a

$$\tilde{w}_y = \frac{1}{3} \frac{1 + 7\tilde{\Omega}_0 \tilde{a}^8}{1 - \tilde{\Omega}_0 \tilde{a}^8}, \quad (\tilde{w}_{\text{ef}} = \frac{1}{3}) \quad (w = -\frac{7}{3}) \quad (4.144)$$

Para $\tilde{a} \ll 1$, isto é, para altos redshifts \tilde{w}_y se aproxima de $\tilde{w}_y = \frac{1}{3}$. A componente y de natureza geométrica procede como radiação neste caso. De acordo (4.130) o universo acelera no referencial de Jordan somente se $w > -\frac{5}{3} \approx -1.66$, e como $w = -\frac{7}{3} \approx -2.33$ não há aceleração.

Por outro lado, se $\tilde{w}_{\text{ef}} = 0$, então $w = -2$. Neste caso a equação (4.143) se reduz a

$$\tilde{w}_y = \frac{2\tilde{\Omega}_0 \tilde{a}^6}{1 - \tilde{\Omega}_0 \tilde{a}^6} \quad (\tilde{w}_{\text{ef}} = 0) \quad (w = -2) . \quad (4.145)$$

Para $\tilde{a} \ll 1$, isto é, em altos redshifts \tilde{w}_y se aproxima de $\tilde{w}_y = 0$. A componente y procede como matéria não relativística. Este aparentemente estranho resultado que possui um período dominado pela matéria $\tilde{w}_{\text{ef}} = 0$ necessita que $\tilde{w}_y = 0$ e da presença de uma

componente energia escura, do tipo fantasma, com $w = -2$. Para $w = -2$ e usando (4.47), obtemos

$$w_1 = -1 + R. \quad (4.146)$$

Esta relação não varia com o tempo já que tanto w_1 quanto R são constantes. Se $w_1 = 0$ (caso não fantômico no referencial de Einstein), então $R = 1$. Por outro lado, a razão física \tilde{r} não é constante de acordo com (4.141) e, portanto para $w = -2$ obtemos

$$\tilde{r} = \frac{\tilde{\Omega}_0 \tilde{a}^6}{1 - \tilde{\Omega}_0 \tilde{a}^6} \quad (\tilde{w}_{ef} = 0) \quad (w = -2) . \quad (4.147)$$

Então $\tilde{r} \rightarrow 0$ se $\tilde{a} \ll 1$. Isto é equivalente a

$$\tilde{\rho}_y \gg \tilde{\rho} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\rho}_{ef} \approx \tilde{\rho}_y \quad (\tilde{a} \ll 1) , \quad (4.148)$$

como já é esperado em um universo dominado pela matéria. Neste cenário, a componente da energia escura $\tilde{\rho}$ é desprezível para altos redshifts.

No momento atual (4.143) se reduz a

$$\tilde{w}_{y0} = -\frac{2 + w(1 + \tilde{\Omega}_0)}{1 - \tilde{\Omega}_0} . \quad (4.149)$$

De acordo com (4.145), $\tilde{w}_y = 0$ para altos redshifts, e parece tentador considerar a possibilidade $\tilde{w}_{y0} \approx 0$ (valor atual de \tilde{w}_y). Isto corresponde à intenção inicial do TeVeS para evitar a introdução da componente matéria escura. Através de (4.149) surge uma relação sob a condição $\tilde{w}_{y0} \approx 0$:

$$w \approx -\frac{2}{1 + \tilde{\Omega}_0} \quad (\tilde{w}_{y0} \approx 0) . \quad (4.150)$$

Se a componente y desenvolve o papel de matéria escura hoje, a componente ‘matéria’ com equação de estado w tem que ser associada à energia escura. Neste caso ocorre uma geometrização da matéria escura.

O próximo passo consiste em analisar o grau de confiabilidade dos resultados da teoria. O modelo Λ CDM é um modelo confiável e, por isso devemos comparar nossos resultados com tal modelo. O parâmetro da equação de estado do modelo Λ CDM é dado por

$$w_{ef}^{\Lambda\text{CDM}} = -\frac{1}{1 + \rho_{m0}/\rho_\Lambda} \approx -\frac{3}{4} = -0.75 , \quad (4.151)$$

onde $\frac{\rho_{m0}}{\rho_\Lambda} \approx \frac{1}{3}$, e isto significa que $\Omega_\Lambda \approx \frac{3}{4}$. Ao comparar este dado com a atual teoria, a razão entre $\tilde{\rho}_0$ e $\tilde{\rho}_{ef0}$ deve ser $\tilde{\Omega}_0 \approx \frac{3}{4}$. Usando este valor em (4.150), encontramos o parâmetro da equação de estado w da energia escura: $w \approx -\frac{8}{7} = -1.14$. Tal valor é compatível com os

dados observacionais [27], e por (4.110) $\tilde{w}_{ef} = -0.86$. Este valor é bem próximo de -0.75 que é o valor predito pelo modelo Λ CDM (veja(4.151)). Portanto, o resultado encontrado está de acordo com as observações e não deve ser rejeitado. Como a aceleração ocorre se w for maior do que $-\frac{5}{3} \approx -1.66$ de acordo com (4.130), e como $w = -1.14$ o universo já está acelerado. Sob a condição (4.150), e por (4.47) segue que

$$w_1 \approx -1 + R \frac{1 - \tilde{\Omega}_0}{1 + \tilde{\Omega}_0} \approx -1 + \frac{R}{7}, \quad (\tilde{w}_{y0} \approx 0). \quad (4.152)$$

Esta equação é formada apenas por constantes. A partir dela, se $w_1 = 0$, então $R = 7$.

Também para $w < -1$, a equação (4.140) pode ser maior que a unidade e, por isso acarretaria valores negativos para $\tilde{\rho}_y$ no futuro. Por isso, pode-se aplicar um limite $w = -1$ para o futuro com $a > 1$ para evitar valores negativos para $\tilde{\rho}_y$. Porém, como será discutido em outro capítulo, existe a possibilidade de existirem energias negativas em situações específicas no universo.

4.7 DISCUSSÃO

Neste modelo foi assumida uma razão constante R , no referencial de Einstein, entre as componentes ρ_1 e ρ_2 que não são provenientes do tensor momento energia. O resultado é H constante, e uma função F que também é constante. No referencial de Jordan, a densidade de energia efetiva é dada por $\tilde{\rho}_{ef} = \tilde{\rho} + \tilde{\rho}_y$, onde $\tilde{\rho}_y$ é de natureza geométrica, e o parâmetro da equação de estado \tilde{w}_y desta componente não é constante. Como $\tilde{w}_{ef} = -2 - w$, então uma solução do tipo matéria só é obtida se $w = -2$ que representa uma energia escura do tipo fantasma no referencial de Jordan. Por outro lado, no referencial de Einstein o caso fantômico ocorre se $w > -1$.

Para altos redshifts, isto é, $\tilde{a} \ll 1$ encontramos uma fase de matéria $\tilde{w}_{ef} = 0$ com $\tilde{w}_y \mapsto 0$. Ainda para $\tilde{a} \ll 1$ existe uma fase do tipo radiação em que $\tilde{w}_{ef} = \frac{1}{3}$ e $\tilde{w}_y \mapsto \frac{1}{3}$. Quando $w = -2$ e $\tilde{a} \ll 1$, então $\tilde{\rho}_{ef} \approx \tilde{\rho}_y$, isto é, a componente energia escura é irrelevante. Ao comparamos a teoria com o modelo Λ CDM, assumindo $\frac{\tilde{\rho}_0}{\tilde{\rho}_{ef0}} \approx \frac{3}{4}$ e $\tilde{w}_{y0} = 0$, então $w \approx -1.14$. Este modelo, ainda que totalmente não convencional, está consistente com as teorias tipo MOND que procuram eliminar a matéria escura. As soluções encontradas implicam na geometrização da matéria escura.

Capítulo 5

SOLUÇÕES DE POTÊNCIA E EXPANSÃO ACELERADA EM TEORIAS ESCALARES TENSORIAIS

5.1 INTRODUÇÃO

O interesse em teorias modificadas de gravidade é motivado pela esperança em descrever a recente aceleração do universo sem a componente energia escura [75, 76], possivelmente incluindo mesmo um procedimento tipo fantasma sem campos fantasmas [77]. Ao invés, é o setor geométrico que supostamente é o responsável por fornecer a desejada dinâmica [39, 62, 78]. Esta classe de aproximação pode ser vista como uma geometrização da energia escura. Teorias quânticas fundamentais envolvendo típica dimensão extra parecem prever teorias escalares tensoriais com 4 dimensões [63]. A teoria de Brans-Dicke, baseada nas idéias de Mach e Jordan, é o protótipo da teoria escalar tensorial [7, 10]. Problemas com teorias escalares tensoriais em geral ou sub classes delas têm sido apontados por vários autores [64–67, 81, 82]. Porém, parece claro que tais teorias merecem atenção, pelo menos como interessantes modelos testes. As teorias $f(R)$ [68, 83–85] podem ser reformuladas e escritas na forma de teorias escalares tensoriais. Condições para a viabilidade cosmológica de modelos de energia escura $f(R)$ foram formuladas em [91].

As teorias escalares tensoriais também têm sido usadas para fornecer explicação geométrica da matéria escura [71, 72, 93]. As teorias escalares tensoriais são formuladas tanto no referencial de Einstein quanto no referencial de Jordan, em que os dois estão relacionados por uma transformação conforme. Segundo a referência [35], os dois referenciais são matem-

aticamente equivalentes, entretanto não necessariamente fisicamente equivalentes. No nível quântico a equivalência é perdida [30]. O campo escalar das teorias escalares tensoriais pertence ao setor geométrico. O formalismo no referencial de Einstein deve ser considerado na forma da RG, em que o campo escalar não geométrico interage com a matéria de alguma forma específica.

Teorias escalares tensoriais são mais complexas do que a RG. Investigações na literatura frequentemente contam com a análise de um sistema dinâmico com o objetivo de encontrar pontos críticos, equivalentes às soluções assintóticas do tipo potência [29]. Soluções de potência para quintessência no caso de vácuo têm sido obtidas, por exemplo, em [97].

É conveniente introduzir a razão das densidades de energia da matéria e a do campo escalar no referencial de Einstein e, então, procurar soluções para um valor constante desta razão. As soluções do referencial de Einstein são transformadas em soluções do referencial de Jordan, e esta transformação permite uma discussão da equação de estado efetiva.

Nossas soluções representam características gerais de teorias escalares tensoriais e não dependem de um modelo específico. Elas são válidas para qualquer teoria escalar tensorial. Demonstramos, todavia, como soluções assintóticas específicas encontradas na literatura se ajustam em nosso esquema. A Seção 5.2 recorda a dinâmica básica das teorias escalares tensoriais no referencial de Einstein e no referencial de Jordan. Na seção 5.3 são encontradas as soluções no referencial de Einstein. As correspondentes soluções no referencial de Jordan são encontradas na seção 5.4. A partir dos resultados encontrados, é feita uma discussão sobre a equação de estado efetiva do meio cósmico e uma comparação da nossa aproximação com o modelo Λ CDM na seção 5.5. Na seção 4.6 encontramos a distância luminosa, e finalmente na seção 4.7 discutimos as conclusões.

5.2 DINÂMICA BÁSICA

As teorias escalares tensoriais escritas no referencial físico, também chamado de referencial de Jordan, possuem a ação do tipo Brans-Dicke com a seguinte forma

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{1}{2\kappa^2} F(\Phi) \tilde{R} - \frac{3(1-4\beta^2)}{16\kappa^2\beta^2} \frac{1}{F(\Phi)} \left(\frac{dF}{d\Phi} \right)^2 (\tilde{\nabla}\Phi)^2 - \tilde{V}(\Phi) \right] + \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{L}_m(\tilde{g}_{\mu\nu}) , \quad (5.1)$$

na qual $\kappa^2 = 8\pi G$ e β é uma constante de acoplamento. As variáveis \tilde{g} e \tilde{R} são o determinante da métrica física $\tilde{g}_{\mu\nu}$ e o escalar de Ricci no referencial físico respectivamente. \tilde{L}_m representa

o lagrangeano da matéria. $F > 0$, por sua vez, é uma função do campo escalar Φ , e $\tilde{V}(\Phi)$ o potencial escalar representado no referencial físico.

No referencial de Einstein a ação acima é escrita na seguinte forma:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa^2} R - \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 - V(\phi) \right] + \int d^4x \sqrt{-g} L_m \left(e^{-2\sqrt{2/3}\beta\phi} g_{\mu\nu} \right) . \quad (5.2)$$

As relações entre o referencial físico e o de Einstein para a métrica e a função $F(\Phi)$ são dadas por

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = e^{-2\sqrt{2/3}\beta\phi} g_{\mu\nu} , \quad F(\Phi) = e^{2\sqrt{2/3}\beta\phi} , \quad (5.3)$$

e

$$\tilde{V}(\Phi) = F(\Phi)^2 V(\phi) . \quad (5.4)$$

É necessário uma função de Φ a fim de relacionar Φ como função de ϕ . A componente temporal da equação de Einstein modificada, escrita no referencial físico, em um universo plano proveniente da ação (5.1) é dada por

$$\tilde{H}^2 = \frac{8\pi G}{3F} [\tilde{\rho}_m + \tilde{V}(\Phi)] - \frac{\tilde{H}}{F} \frac{dF}{d\tilde{t}} + \frac{1-4\beta^2}{16\beta^2} \frac{1}{F^2} \left(\frac{dF}{d\tilde{t}} \right)^2 , \quad (5.5)$$

onde $\tilde{H} = \frac{1}{\tilde{a}} \frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}}$. Também há outras equações neste referencial dadas por

$$\frac{d\tilde{H}}{d\tilde{t}} = -\frac{1}{2F} 8\pi G (\tilde{\rho}_m + \tilde{p}_m) - \frac{1}{2F} \frac{d^2 F}{d\tilde{t}^2} + \frac{1}{2} \frac{\tilde{H}}{F} \frac{dF}{d\tilde{t}} - 3 \frac{1-4\beta^2}{16\beta^2} \frac{1}{F^2} \left(\frac{dF}{d\tilde{t}} \right)^2 , \quad (5.6)$$

$$\frac{d^2 F}{d\tilde{t}^2} + 3\tilde{H} \frac{dF}{d\tilde{t}} = \frac{4}{3} 8\pi G \beta^2 \left[4\tilde{V}(\Phi) - 2\tilde{V}_{,\Phi} \frac{F}{F_{,\Phi}} + (\tilde{\rho}_m - 3\tilde{p}_m) \right] . \quad (5.7)$$

Novamente como se trata do referencial físico o tensor momento energia da matéria se conserva e, portanto

$$\frac{d\tilde{\rho}_m}{d\tilde{t}} + 3\tilde{H} (\tilde{\rho}_m + \tilde{p}_m) = 0 . \quad (5.8)$$

As equações correspondentes no referencial de Einstein são dadas por

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left[\rho_m + \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + V \right] , \quad (5.9)$$

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\kappa^2}{2} \left[\rho_m + p_m + \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] , \quad (5.10)$$

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} + 3H \frac{d\phi}{dt} + V_{,\phi} = \sqrt{\frac{2}{3}} \kappa \beta (\rho_m - 3p_m) , \quad (5.11)$$

$$\frac{d\rho_m}{dt} + 3H(\rho_m + p_m) = -\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\beta\frac{d\phi}{dt}(\rho_m - 3p_m) . \quad (5.12)$$

onde $H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}$. Como estamos no referencial de Einstein é natural que o tensor momento energia da matéria não se conserva, por isso o lado direito da equação (5.12) não é 0. As relações entre o tempo físico e o não físico, e o fator de escala físico e o não físico são dadas por

$$d\tilde{t} = e^{-\sqrt{2/3}\kappa\beta\phi} dt \quad \text{e} \quad \tilde{a} = e^{-\sqrt{2/3}\kappa\beta\phi} a , \quad (5.13)$$

respectivamente. O fator que relaciona a pressão da matéria no referencial de Einstein com o referencial físico é o mesmo que relaciona a densidade de energia da matéria no referencial de Einstein com o referencial físico:

$$\tilde{p}_m = e^4 \sqrt{2/3}\kappa\beta\phi p_m , \quad \tilde{\rho}_m = e^4 \sqrt{2/3}\kappa\beta\phi \rho_m . \quad (5.14)$$

pelas equações acima conclui-se imediatamente que $\frac{p_m}{\rho_m} = \frac{\tilde{p}_m}{\tilde{\rho}_m}$, isto é, o parâmetro da equação de estado $\omega_m = \tilde{\omega}_m$ permanece invariante.

5.3 DESCRIÇÃO DE DUAS COMPONENTES

Iniciaremos nossa investigação no referencial de Einstein já que as equações ficam mais simples [33]. Multiplicando (5.11) por $\frac{d\phi}{dt}$ encontra-se:

$$\frac{d\phi}{dt} \frac{d^2\phi}{dt^2} + 3H \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + V_{,\phi} \frac{d\phi}{dt} = \sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\beta \frac{d\phi}{dt} (\rho_m - 3p_m) . \quad (5.15)$$

A densidade de energia do campo escalar ρ_ϕ e a correspondente pressão que é dada por p_ϕ , são definidas como

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + V \quad \text{e} \quad p_\phi = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 - V , \quad (5.16)$$

respectivamente. Embora o tensor momento energia da matéria não seja geralmente conservado no referencial de Einstein, o efetivo é. Portanto, a partir desta afirmação e da equação (5.12) encontra-se a relação

$$\frac{d\rho_\phi}{dt} + 3H(\rho_\phi + p_\phi) = \sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\beta \frac{d\phi}{dt} (\rho_m - 3p_m) . \quad (5.17)$$

Obviamente ao somar (5.12) com (5.17) o resultado no lado direito será 0, justamente porque a densidade de energia total ou também chamada efetiva se conserva:

$$\rho = \rho_m + \rho_\phi, \quad p = p_m + p_\phi \quad \Rightarrow \quad \frac{d\rho}{dt} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (5.18)$$

A equação (5.12) pode ser escrita como

$$\frac{1}{\rho_m} \frac{d\rho_m}{dt} + 3H(1 + w_m) = -\sqrt{\frac{2}{3}} \kappa \beta \frac{d\phi}{dt} (1 - 3w_m), \quad (5.19)$$

onde $w_m = \frac{p_m}{\rho_m}$. De forma similar por (5.17),

$$\frac{1}{\rho_\phi} \frac{d\rho_\phi}{dt} + 3H(1 + w_\phi) = \sqrt{\frac{2}{3}} \kappa \beta \frac{d\phi}{dt} (1 - 3w_m) r, \quad (5.20)$$

onde $w_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi}$ é o parâmetro da equação de estado para o campo escalar no referencial de Einstein. Além do mais, também foi introduzida a razão das densidades de energia r como sendo constante

$$r \equiv \frac{\rho_m}{\rho_\phi}. \quad (5.21)$$

O conjunto de equações (5.19) e (5.20) é remanescente de uma investigação anterior de modelos quintessência (veja [74]), em que o campo escalar é parte do tensor momento energia dentro da relatividade geral padrão e interage com a matéria de maneira específica. O parâmetro r , por sua vez, descreve a razão entre a matéria escura mais bariônica com energia escura. O parâmetro de acoplamento β está relacionado ao parâmetro de Brans-Dicke ω_{BD} pela relação

$$\omega_{BD} = \frac{3}{8} \frac{1 - 4\beta^2}{\beta^2} \quad \Leftrightarrow \quad \beta^2 = \frac{3}{4} \frac{1}{2\omega_{BD} + 3}. \quad (5.22)$$

Uma das maneiras de explicar a presente aceleração do universo, é modificar a teoria de gravidade de Einstein, introduzindo correções no lagrangeano Einstein-Hilbert [51]. Estas teorias alternativas de gravitação seguem a idéia de que a expansão acelerada do universo deve possuir uma interpretação geométrica ao invés de se adicionar uma forma exótica de energia, denominada energia escura [51]. Por este ponto de vista, a energia escura é a manifestação de uma gravitação modificada ao invés de uma nova forma de energia [51]. A forma mais simples de gravitação alternativa [51] pode ser obtida trocando o escalar de Ricci R , na ação da relatividade geral, por uma função $f(R)$.

A classe de teorias $f(R)$ corresponde ao caso especial $\beta^2 = \frac{1}{4}$, equivalente a $\omega_{BD} = 0$, como se pode observar através de (5.22). No limite oposto em que $\omega_{BD} \mapsto \infty$, a teoria de Brans-Dicke tem como limite a relatividade geral e, portanto $\beta \mapsto 0$. As teorias $f(R)$ têm dificuldade de passar nos testes na escala do sistema solar [36]. Outra característica dessa

classe de teorias é que o fator de escala no referencial de jordan é proporcional a $\tilde{t}^{1/2}$, o que não está em acordo com o valor do regime dominado pela matéria [35, 36] e está em contradição com dados observacionais [36]. Neste período o universo não entrou ainda na fase acelerada [36]. O ponto positivo é que elas podem explicar a aceleração do universo bem como geometrizam a matéria escura [39]. Também segundo a referência [36], as teorias $f(R)$ coincidem com a teoria de Brans-Dicke com $\omega_{BD} = 0$ e com a presença de um potencial. As teorias $f(R)$ também são equivalentes aos modelos quintessência escritos no referencial de Einstein com potencial exponencial [35, 36]. A estabilidade da teoria $f(R)$ seria garantida contanto que [15]

$$\frac{df(R)}{dR} > 0 \quad (5.23)$$

e

$$\frac{d^2 f(R)}{dR^2} > 0. \quad (5.24)$$

A razão (5.21) varia de acordo com

$$\frac{dr}{dt} = r \left[\frac{1}{\rho_m} \frac{d\rho_m}{dt} - \frac{1}{\rho_\phi} \frac{d\rho_\phi}{dt} \right]. \quad (5.25)$$

Por (5.19) e (5.20) em (5.25) encontramos

$$\frac{dr}{dt} = 3Hr \left[w_\phi - w_m - \sqrt{\frac{2}{3}} \kappa \beta \frac{1}{3H} \frac{d\phi}{dt} (1 - 3w_m) (1 + r) \right]. \quad (5.26)$$

O interesse no presente caso é por um r constante no referencial de Einstein caracterizado pela razão entre as densidades de energia. Portanto para o caso particular $r = \text{constante}$, temos

$$\frac{dr}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3H} \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{\kappa \beta} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{w_\phi - w_m}{(1 - 3w_m) (1 + r)}. \quad (5.27)$$

que pode ser escrita como

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \kappa \beta \frac{d\phi}{dt} (1 - 3w_m) = 3H \frac{w_\phi - w_m}{1 + r}. \quad (5.28)$$

O lado esquerdo da equação (5.28), corresponde ao lado direito das equações (5.12) e (5.17). Consequentemente surgem

$$\frac{d\rho_\phi}{dt} + 3H (\rho_\phi + p_\phi) = 3H \frac{w_\phi - w_m}{1 + r} r \rho_\phi. \quad (5.29)$$

e

$$\frac{d\rho_m}{dt} + 3H (\rho_m + p_m) = -3H \frac{w_\phi - w_m}{1 + r} \rho_m. \quad (5.30)$$

Obviamente a soma das equações (5.29) e (5.30) deve dar 0 no lado direito, a partir de (5.21) e (5.18). Como estamos no referencial de Einstein a matéria interage com o campo escalar e, por isso é o tensor momento energia total que se conserva e não a matéria isolada. Também a direção do fluxo de energia depende do sinal de $w_\phi - w_m$. Para $w_\phi - w_m > 0$ há um fluxo da componente m para a componente ϕ . Para $w_\phi - w_m < 0$ ocorre o oposto (sempre assumindo $H > 0$). Como w_m é constante, então a solução da equação (5.19) é

$$\rho_m = \rho_{mi} \left(\frac{a_i}{a} \right)^{3(1+w_m)} e^{-\sqrt{2/3}\kappa\beta(1-3w_m)(\phi-\phi_i)}, \quad (5.31)$$

sendo que o índice i indica valor inicial. De forma similar, se w_ϕ e r forem constantes, então a solução de (5.20) é

$$\rho_\phi = \rho_{\phi i} \left(\frac{a_i}{a} \right)^{3(1+w_\phi)} e^{\sqrt{2/3}\kappa\beta(1-3w_m)r(\phi-\phi_i)}. \quad (5.32)$$

Obviamente, (5.32) é consistente com (5.27), pois as duas equações existem a partir da condição de que r é constante.

Como $H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}$, e integrando a equação (5.27) é encontrado

$$e^{\sqrt{2/3}\kappa\beta(\phi-\phi_i)} = \left(\frac{a_i}{a} \right)^{3 \frac{w_m - w_\phi}{(1-3w_m)(1+r)}} \Leftrightarrow \frac{a_i}{a} = e^{\sqrt{2/3}\kappa\beta \frac{(1-3w_m)(1+r)}{3(w_m - w_\phi)} (\phi - \phi_i)}, \quad (5.33)$$

que também pode ser escrita como

$$e^{\sqrt{2/3}\kappa\beta(1-3w_m)r(\phi-\phi_i)} = \left(\frac{a}{a_i} \right)^{\frac{3r}{1+r}(w_\phi - w_m)}. \quad (5.34)$$

Combinando (5.32) e (5.34) encontramos

$$\rho_\phi = \rho_{\phi i} \left(\frac{a_i}{a} \right)^{3 \frac{1+w_\phi+r(1+w_m)}{1+r}}. \quad (5.35)$$

Pode-se também mostrar que

$$\rho_m \propto \left(\frac{a_i}{a} \right)^{3 \frac{1+w_\phi+r(1+w_m)}{1+r}}. \quad (5.36)$$

A equação de Friedmann (5.9), combinada com a definição (5.21), pode ser escrita como

$$3H^2 = 8\pi G\rho = 8\pi G(1+r)\rho_\phi. \quad (5.37)$$

Consequentemente, unindo a eq.(5.37) com ρ_ϕ da eq.(5.35), encontra-se o parâmetro de Hubble no referencial de Einstein o qual é dado por

$$H = H_i \left(\frac{a_i}{a} \right)^{\frac{3}{2} \frac{1+w_\phi+r(1+w_m)}{1+r}}. \quad (5.38)$$

Após uma integração dos dois lados, encontramos o fator de escala no referencial de Einstein

$$a = a_i \left[1 + \frac{3}{2} \frac{1 + w_\phi + r(1 + w_m)}{1 + r} H_i (t - t_i) \right]^{\frac{2}{3} \frac{1+r}{1+w_\phi+r(1+w_m)}}, \quad (5.39)$$

ou

$$a = a_i \left(\frac{t}{t_i} \right)^{\frac{2}{3} \frac{1+r}{1+w_\phi+r(1+w_m)}}, \quad (5.40)$$

A partir da relação

$$H_i = \frac{2}{3} \frac{1 + r}{1 + w_\phi + r(1 + w_m)} \frac{1}{t_i}. \quad (5.41)$$

junto com a (5.39), a eq.(5.40) é encontrada. Obviamente os limites corretos para $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$ são recuperados. No referencial de Einstein

$$a = a_i \left(\frac{t}{t_i} \right)^{\frac{2}{3(1+w_{ef})}}, \quad H = \frac{2}{3(1+w_{ef})} \frac{1}{t}. \quad (5.42)$$

onde $w_{ef} = \frac{p}{\rho}$ é a fração entre a pressão efetiva (total) e a densidade de energia efetiva (total) (5.18). Comparando, então a eq.(5.42) com a eq.(5.40) obtém-se

$$w_{ef} = \frac{w_\phi + r w_m}{1 + r} \Rightarrow 1 + w_{ef} = \frac{1 + w_\phi + r(1 + w_m)}{1 + r}. \quad (5.43)$$

Com (5.42), a dinâmica do referencial de Einstein está completamente resolvida. Desde que w_{ef} é constante, soluções deste tipo não podem descrever transições entre épocas com diferentes equações de estado. Na melhor das hipóteses, podemos comparar soluções com diferentes valores de w_{ef} . Pelo parâmetro desaceleração $q \equiv -\frac{1}{aH^2} \frac{d^2 a}{dt^2} = -1 - \frac{1}{H^2} \frac{dH}{dt}$ e por (5.38) encontra-se no referencial de Einstein

$$q = \frac{1}{2} (1 + 3w_{ef}) = \frac{1}{2} \frac{1 + 3w_\phi + r(1 + 3w_m)}{1 + r}. \quad (5.44)$$

A condição para a expansão acelerada, novamente no referencial de Einstein, é

$$\frac{1}{a} \frac{d^2 a}{dt^2} > 0 \Leftrightarrow w_{ef} < -\frac{1}{3} \Leftrightarrow w_\phi + r w_m < -\frac{1}{3} (1 + r). \quad (5.45)$$

Uma expansão acelerada pode ser obtida para $w_m = 0$ e $w_\phi < -\frac{1}{3} (1 + r)$. O caso especial da expansão exponencial é caracterizado por

$$w_{ef} = -1 \Leftrightarrow 1 + w_\phi + r(1 + w_m) = 0 \Leftrightarrow w_\phi + r w_m = -1 - r \Leftrightarrow q = -1. \quad (5.46)$$

Como as equações são provenientes da quintessência, então $w_\phi \geq -1$. O segundo termo da eq. acima pode ser escrito como

$$w_m = -1 - \frac{1 + w_\phi}{r} \quad (H = \text{constante}), \quad (5.47)$$

isto é, $w_m \leq -1$, e a componente m tem que ser do tipo fantasma ($H = \text{constante}$).

No referencial de Einstein a densidade de energia efetiva (total) varia da forma

$$\rho \propto a^{-3(1+w_{ef})}. \quad (5.48)$$

Uma solução do tipo matéria pode ser encontrada, $\rho \propto a^{-3}$, fazendo $w_{ef} = 0$ na eq.(5.48). De acordo com a eq.(5.43), isto pode ser feito para qualquer combinação realizada a partir de $w_\phi + rw_m = 0$. Todavia, todas estas soluções, baseadas em (5.42), não são soluções dentro do referencial físico e, por isso seu significado não é óbvio, pelo menos até o presente estágio.

Por (5.27) e (5.37) segue que

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 = \frac{9}{4} \frac{(w_m - w_\phi)^2}{\beta^2 (1 - 3w_m)^2 (1 + r)} \rho_\phi. \quad (5.49)$$

Então, unindo (5.16) e (5.49), o potencial encontrado é dado por

$$V(\phi) = \rho_\phi - \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 = \left[1 - \frac{9}{4} \frac{(w_m - w_\phi)^2}{\beta^2 (1 - 3w_m)^2 (1 + r)} \right] \rho_\phi. \quad (5.50)$$

E através de (5.32), (5.33) e (5.50) surge um potencial exponencial

$$V(\phi) = V_i e^{\sqrt{2/3}\kappa\beta \frac{(1-3w_m)[1+w_\phi+r(1+w_m)]}{w_m-w_\phi} (\phi-\phi_i)}, \quad (5.51)$$

ou de forma alternativa, usando (5.43) em(5.51) encontramos

$$V(\phi) = V_i e^{-\sqrt{2/3}\kappa\beta \frac{(1-3w_m)(1+w_{ef})}{w_{ef}-w_m} (\phi-\phi_i)}, \quad V_i = \left[1 - \frac{9}{4} \frac{(w_m - w_\phi)^2}{\beta^2 (1 - 3w_m)^2 (1 + r)} \right] \rho_{\phi_i}. \quad (5.52)$$

Unindo (5.49) e (5.16), junto com a definição $w_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi}$, surge a relação

$$\beta^2 = \frac{9}{2} \frac{(w_m - w_\phi)^2}{(1 - 3w_m)^2} \frac{1}{1 + r} \cdot \frac{1}{1 + w_\phi}. \quad (5.53)$$

Como mencionado anteriormente, a constante de interação nas equações (5.12) e (5.17) não é um parâmetro livre, porém deve ser determinada pelos parâmetros da equação de estado e r . Com (5.53) junto com (5.51) e (5.27), a equação do campo escalar (5.11) é identicamente satisfeita. Qualquer valor de $\beta^2 \neq \frac{1}{4}$ representa uma teoria fora da classe $f(R)$.

Ao eliminar β através de (5.53), o potencial (5.52) pode ser escrito como

$$V(\phi) = V_i \exp\left\{-\sqrt{24\pi G} \sqrt{\frac{1+r}{1+w_\phi}} (1+w_{ef}) (\phi-\phi_i)\right\}, \quad (5.54)$$

enquanto que a combinação de (5.22) com (5.53) resulta em

$$\omega_{BD} = -\frac{3}{2} + \frac{1}{12} \frac{(1-3w_m)^2}{(w_m-w_\phi)^2} (1+r)(1+w_\phi) \quad (5.55)$$

que é o parâmetro de Brans-Dicke.

5.4 SOLUCÕES NO REFERENCIAL DE JORDAN

Através de (5.13) encontra-se

$$\frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}} = \frac{da}{dt} - \sqrt{2/3}\kappa\beta \frac{d\phi}{dt} a. \quad (5.56)$$

e a partir da condição (5.27), obtemos a relação

$$\tilde{H} = H e^{\sqrt{2/3}\kappa\beta\phi} \frac{1-3w_{ef}}{1-3w_m} \quad (5.57)$$

Isto significa que o parâmetro de Hubble não possui necessariamente o mesmo sinal nos dois referenciais. Por (5.33) segue

$$e^{\sqrt{2/3}\kappa\beta\phi} \propto a^{-3 \frac{w_m-w_{ef}}{(1-3w_m)}}. \quad (5.58)$$

A relação explícita entre \tilde{a} e a é dada por

$$\frac{\tilde{a}}{\tilde{a}_i} = \left(\frac{a}{a_i} \right)^{\frac{1-3w_{ef}}{1-3w_m}}. \quad (5.59)$$

Combinando (5.58) com (5.42) obtemos

$$e^{-\sqrt{2/3}\kappa\beta\phi} \propto t^{2 \frac{w_m-w_{ef}}{(1-3w_m)(1+w_{ef})}}. \quad (5.60)$$

Através do conhecimento explícito da dependência temporal do lado direito de (5.60), pode-se obter uma relação $\tilde{t}(t)$ entre o tempo físico (referencial de Jordan) \tilde{t} e o não físico (referencial de Einstein) t . Integrando a primeira relação (5.13) encontramos

$$\tilde{t} \propto t^{\frac{1-w_{ef}-w_m(1+3w_{ef})}{(1-3w_m)(1+w_{ef})}} \Leftrightarrow t \propto \tilde{t}^{\frac{(1-3w_m)(1+w_{ef})}{1-w_{ef}-w_m(1+3w_{ef})}}. \quad (5.61)$$

Por (5.42), (5.61) e (5.59) encontramos o fator de escala no referencial de Jordan

$$\tilde{a} \propto \tilde{t}^{\frac{2}{3} \left(\frac{1-3w_{ef}}{1-w_m-w_{ef}(1+3w_m)} \right)}. \quad (5.62)$$

Mas, o fator de escala também é dado por

$$\tilde{a} \propto \tilde{t}^{\frac{2}{3(1+\tilde{w}_{ef})}} , \quad (5.63)$$

então através de (5.62) e (5.63)

$$\tilde{w}_{ef} = \frac{2w_{ef} - w_m(1 + 3w_{ef})}{1 - 3w_{ef}} . \quad (5.64)$$

Com (5.63) e (5.64) a dinâmica no referencial de Jordan está resolvida.

Por cálculo direto podemos verificar que a solução no referencial de Jordan (5.63) está de acordo com as equações (5.5) - (5.8). As soluções são do tipo potência, correspondendo a um parâmetro efetivo constante da equação de estado (5.64). O parâmetro w_{ef} difere obviamente de \tilde{w}_{ef} . A forma da densidade de energia efetiva, por ser conservada, possui a forma

$$\tilde{\rho}_{ef} \propto \tilde{a}^{-3(1+\tilde{w}_{ef})} . \quad (5.65)$$

A introdução desta quantidade serve para encontrar soluções através de uma equação que possui o mesmo formato que a equação Friedmann da RG,

$$3\tilde{H}^2 = 8\pi G\tilde{\rho}_{ef} \quad (5.66)$$

O parâmetro da equação de estado é \tilde{w}_{ef} . Este ponto será elaborado na seção 5.5. O parâmetro desaceleração no referencial de Jordan é dado por

$$\tilde{q} \equiv -\frac{\tilde{a} \frac{d^2 \tilde{a}}{d\tilde{t}^2}}{\left(\frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \tilde{q} = \frac{1}{2} (1 + 3\tilde{w}_{ef}) , \quad (5.67)$$

e a relação entre o parâmetro desaceleração do referencial de Jordan e o do referencial de Einstein é dada por

$$\tilde{q} = q \frac{(1 - 3w_m)(1 + r)}{1 - 3w_\phi + r(1 - 3w_m)} = q \frac{1 - 3w_m}{1 - 3w_{ef}} . \quad (5.68)$$

Veja que \tilde{q} e q não possuem necessariamente o mesmo sinal. Para $w_m = 0$ e $w_{ef} > \frac{1}{3}$, uma desaceleração do universo no referencial de Einstein corresponde a uma aceleração do universo no referencial de Jordan. Portanto, o referencial de Einstein e o físico (Jordan) são matematicamente equivalentes, mas isso não implica necessariamente que sejam fisicamente equivalentes [35]. No caso de aceleração exponencial no referencial de Einstein (veja (5.46)) segue

$$\tilde{q} = -\frac{1}{4} (1 - 3w_m) , \quad (w_\phi + rw_m = -1 - r) . \quad (5.69)$$

No caso particular $w_m = -1$, segue $\tilde{q} = -1$. Note também que $q = -1$ (referencial de Einstein) para $w_{ef} = -1$ que corresponde a H constante.

A relação entre \tilde{H} e \tilde{a} é dada por

$$\tilde{H} \propto \tilde{a}^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{(1+r)(1-w_m) - (1+3w_m)(w_\phi + r w_m)}{1-3w_\phi + r(1-3w_m)} \right) \quad (5.70)$$

Novamente no caso de aceleração exponencial no referencial de Einstein, por (5.46) e (5.70), surge a relação

$$\tilde{H} \propto \tilde{a}^{-\frac{3}{4}(1+w_m)} \quad (5.71)$$

Concluimos que se \tilde{H} é constante, então o fator de escala do referencial físico é do tipo exponencial e isto ocorre quando $w_m = -1$. Como $1 + r + w_\phi + w_m r = 0$ quando H é constante, então $w_\phi = -1$. Este é o caso em que \tilde{H} e H são constantes ao mesmo tempo.

Um caso de interesse particular é o de $w_m = 0$ (observe que $\tilde{w}_m = w_m$). Então a relação (5.64) se reduz a

$$\tilde{w}_{ef} = \frac{2w_{ef}}{1 - 3w_{ef}}. \quad (5.72)$$

Dada a equação de estado para o caso matéria sem pressão, a eq. (5.72) define um possível parâmetro físico da equação de estado em termos dos parâmetros do referencial de Einstein. A relação entre diferentes intervalos de \tilde{w}_{ef} e w_{ef} é mostrada na tabela 5.1. Casos especiais de interesse no referencial de Jordan (referencial físico) são:

- (i) *fase dominada pela matéria* $w_m = \tilde{w}_{ef} = 0$, e por (5.72), $w_{ef} = 0$. Este caso requer $w_\phi = 0$, em acordo com (5.43). Esta fase corresponde ao limite entre as faixas III e IV da tabela Tabela 5.1. De acordo com (5.53), esta fase dominada pela matéria possui $\beta^2 = 0$. Desta forma não pode haver teorias $f(R)$, que são caracterizadas por $\beta^2 = \frac{1}{4}$.
- (ii) *fase de aceleração exponencial*, ocorre para $\tilde{w}_{ef} = -1$ em (5.72) já que

$$\tilde{\rho}_{ef} \propto \tilde{a}^{-3(1+\tilde{w}_{ef})} \quad (5.73)$$

e

$$3\tilde{H}^2 = 8\pi G \tilde{\rho}_{ef}, \quad (5.74)$$

portanto, $\tilde{H} = \text{constante}$. Por (5.72), e fazendo o expoente de (5.70) igual a zero com $w_m = 0$, então

$$w_{ef} = 1 \quad \Rightarrow \quad w_\phi = 1 + r \quad (5.75)$$

Este caso corresponde ao limite entre I e II na tabela 5.1. Se $\tilde{w}_{ef} = -1$, então $w_{ef} = +1$ (veja (5.72)). Isto significa que enquanto ocorre uma expansão exponencial acelerada no

referencial de Jordan, ocorre uma contração desacelerada no referencial de Einstein (veja 5.57, 5.67) já que

$$q = \frac{1}{2} (1 + 3w_{ef}) . \quad (5.76)$$

Este resultado também está de acordo com (5.68). Por (5.57), $w_m = 0$ e $w_{ef} > \frac{1}{3}$, o parâmetro de Hubble no referencial de Einstein tem sinal diferente do sinal no referencial de Jordan. Também por $w_{ef} > \frac{1}{3}$, $w_m = 0$ e (5.68), um universo que desacelera no referencial de Einstein, corresponde a um universo que acelera no referencial de Jordan. Para $w_\phi > 1$, o potencial $V(\phi)$ deve ser negativo a partir de (5.16), ou de forma equivalente, através de

$$V(\phi) = \frac{\rho_\phi}{2} (1 - w_\phi) . \quad (5.77)$$

Foi admitido $w_m = 0$.

(iii) *começo da fase acelerada* $\tilde{w}_{ef} = -\frac{1}{3}$. Isto é devido à equação (5.67). Neste caso, no limite entre os intervalos IV e V na tabela 5.1, temos $w_{ef} = -\frac{1}{3}$ a qual é verificada por (5.72). Pelas equações (5.72) e (5.43) com $w_m = 0$ encontramos

$$\tilde{w}_{ef} = \frac{2w_\phi}{1 + r - 3w_\phi} \quad (5.78)$$

Portanto, neste caso em particular em que $\tilde{w}_{ef} = -\frac{1}{3}$, o parâmetro da equação de estado do campo ϕ é dado por

$$w_\phi = -\frac{1}{3} (1 + r) . \quad (5.79)$$

Aqui também foi admitido $w_m = 0$.

(iv) *caso intermediário*, anexo à faixa I da tabela 5.1, é $\tilde{w}_{ef} = -\frac{3}{4}$, correspondendo a $w_{ef} = 3$ com $w_\phi = 3(1 + r)$. Novamente foi usado (5.72), (5.78), além de $w_m = 0$.

(v) *equação de estado fantasma* $\tilde{w}_{ef} = -\frac{3}{2}$, parte da faixa II da tabela 5.1. Portanto, $w_{ef} = \frac{3}{5}$ por (5.72) que é para $w_m = 0$.

O próximo passo consiste em investigar quais valores de \tilde{w}_{ef} em (5.72) admitem $\beta^2 = \frac{1}{4}$ que é o caso da teoria $f(R)$. Neste caso, usando (5.53), (5.43) e fazendo $w_m = 0$ encontramos

$$\tilde{w}_{ef} = \frac{2}{3} \frac{1 \pm \sqrt{1 + \frac{72}{1+r}}}{11 \mp \sqrt{1 + \frac{72}{1+r}}}, \quad \beta^2 = \frac{1}{4} . \quad (5.80)$$

(vi) $\beta^2 = \frac{1}{4}$ e $r = 0$. Por (5.80), encontramos $\tilde{w}_{ef} \approx 2.5$ e $\tilde{w}_{ef} \approx -0.26$. Expansão acelerada é impossível nestas condições já que para haver aceleração no referencial de Jordan seria necessário $\tilde{w}_{ef} < -\frac{1}{3}$.

(vii) $\beta^2 = \frac{1}{4}$ e $r \rightarrow \infty$. Para grandes valores de r (ordem 10^3), as soluções de (5.80) são $\tilde{w}_{ef} \approx \frac{2}{15}$ e $\tilde{w}_{ef} \approx 0$. O último valor representa o período dominado pela matéria com $\tilde{a} \propto \tilde{t}^{2/3}$. Novamente não há aceleração.

(viii) $\beta^2 = \frac{1}{4}$ e $r = 8$. O sinal superior de (5.80) dá $\tilde{w}_{ef} = \frac{1}{3}$, correspondendo a $\tilde{a} \propto \tilde{t}^{1/2}$. Esta solução desempenhou um papel na discussão sobre a viabilidade cósmica das teorias $f(R)$ [36]. Para o sinal inferior segue $\tilde{w}_{ef} = -\frac{2}{21} \cong -0.09 > -\frac{1}{3} \cong -0.33$. Mais uma vez não há aceleração.

A existência de soluções na forma de potência com $\tilde{w}_{ef} < -\frac{1}{3}$ em um universo preenchido por matéria sem pressão é possivelmente a mais simples demonstração da capacidade das teorias escalares tensoriais para estimar uma expansão acelerada sem a componente energia escura. Por outro lado, também é possível encontrar equações de estado de interesse sob a condição $w_m \neq 0$ e $w_\phi = 0$. Para $w_\phi = 0$, a relação geral (5.64) se torna

$$\tilde{w}_{ef} = w_m \frac{r(1 - 3w_m) - 1}{r(1 - 3w_m) + 1}. \quad (5.81)$$

Esta equação conduz a uma relação quadrática para w_m ,

$$w_m^2 + \frac{1}{3} \frac{1 - r(1 + 3\tilde{w}_{ef})}{r} w_m + \frac{1 + r}{3r} \tilde{w}_{ef} = 0. \quad (5.82)$$

Temos então

(ix) *um universo dominado por matéria* $\tilde{w}_{ef} = 0$. Há duas soluções, $w_m = 0$ e $w_m = \frac{1}{3} \frac{r-1}{r}$. para $r \gg 1$ o segundo caso se aproxima de $w_m = \frac{1}{3}$, isto é, a equação de estado da radiação.

(x) *expansão exponencialmente acelerada* com $\tilde{w}_{ef} = -1$, $\tilde{q} = -1$. Esta condição pode ser verificada através de (5.67), (5.73) e (5.74). Neste caso o parâmetro da equação de estado da componente matéria é dado por

$$w_m = -\frac{1}{6} \frac{1 + 2r}{r} \left[1 \pm \sqrt{1 + 12r \frac{1 + r}{(1 + 2r)^2}} \right]. \quad (5.83)$$

Para $r \gg 1$ as soluções são $w_m = -1$ e $w_m = \frac{1}{3}$. Para $r = 1$ temos $w_m = -1.46$ e $w_m = 0.45$. Para as soluções com $w_m < 0$ pode ser argumentado que a componente ϕ descreve a matéria (não relativística), e a componente m desenvolve o papel da energia escura. Diferente dos casos em que a energia escura é geometrizada, agora é a matéria escura que é geometrizada. Mas novamente, existem soluções para uma expansão acelerada que não requerem parâmetro da equação de estado negativo da componente matéria, isto é, soluções com $\tilde{w}_{ef} = -1$ que possuem $w_\phi = 0$ e $w_m > 0$.

A análise de sistemas dinâmicos determina pontos críticos da evolução cósmica que (em algumas investigações) estão na forma de soluções assintóticas e na forma de potência como

em (5.63) (veja [29, 95]). Como exemplo, mostramos a consistência das nossas soluções com pontos críticos obtido em [26].

Ponto P1 em [26] tem $\tilde{w}_{ef} = -1$ e $\frac{\tilde{\rho}_m}{\tilde{\rho}_{ef}} = 0$. Isto corresponde ao nosso caso (ii) acima com $r = 0$.

Ponto P2 em [26] tem $\tilde{w}_{ef} = \frac{8\beta^2}{9-12\beta^2}$ e $\frac{\tilde{\rho}_m}{\tilde{\rho}_{ef}} = \frac{9-4\beta^2}{(3-4\beta^2)^2}$. $\beta^2 = 0$ descreve a fase dominada pela matéria em acordo com o caso (i) acima. Através da relação acima, $\tilde{w}_{ef} = -1$ se $\beta^2 = \frac{9}{4}$. No caso $\beta^2 = \frac{9}{4}$, temos na nossa teoria $w_{ef} = w_\phi = 1$ se $w_m = r = 0$ e, portanto $\tilde{w}_{ef} = -1$ (veja 5.43, 5.75, 5.72). Isto é verificado por (5.53). Portanto aqui, $\beta^2 = \frac{9}{4}$ corresponde ao caso (ii) acima.

Ponto P3 em [26] tem $\tilde{w}_{ef} = \frac{3-2\beta}{3+6\beta}$ e $\frac{\tilde{\rho}_m}{\tilde{\rho}_{ef}} = 0$. Pela nossa solução (5.53) de β com $w_m = r = 0$ e por $w_{ef} = w_\phi$ (veja 5.43), encontramos

$$\beta = \pm \sqrt{\frac{9w_{ef}^2}{2(1+w_{ef})}}. \quad (5.84)$$

Usando (5.84) e a definição de \tilde{w}_{ef} acima, encontramos

$$\tilde{w}_{ef} = \frac{3 \mp 3\sqrt{2} \frac{w_{ef}}{\sqrt{1+w_{ef}}}}{3 \pm 9\sqrt{2} \frac{w_{ef}}{\sqrt{1+w_{ef}}}}. \quad (5.85)$$

Para $w_{ef} = 1$ existe uma solução $\tilde{w}_{ef} = 0$ (sinal superior), e outra (sinal inferior) $\tilde{w}_{ef} = -1$ que novamente se reduz ao caso (ii).

Finalmente o ponto P7 em [26] tem $\tilde{w}_{ef} = \frac{3+2\beta}{3-6\beta}$ e $\frac{\tilde{\rho}_m}{\tilde{\rho}_{ef}} = 0$. Portanto, se $\tilde{w}_{ef} = -1$, então $\beta = \frac{3}{2}$ (veja também P2). Novamente, na nossa teoria, isto requer $w_\phi = w_{ef} = 1$ se $w_m = r = 0$ (veja 5.43, 5.75, 5.53, 5.72) e, por isso $\tilde{w}_{ef} = -1$. Portanto aqui, $\beta = \frac{3}{2}$ corresponde ao caso (ii). O potencial é $V(\phi) = 0$ em acordo com (5.77). Concluimos que nossa solução (5.64), e em particular o caso especial (5.72), são consistentes com os resultados da análise do sistema dinâmico.

5.5 O MEIO CÓSMICO

Vamos voltar à equação de Friedmann (5.74) e à equação da densidade de energia (5.73). Obviamente, (5.63) é solução de (5.74). A densidade de energia (5.73), por outro lado, pode ser vista como solução da equação da conservação da energia

$$\frac{d\tilde{\rho}_{ef}}{dt} + 3\tilde{H}(\tilde{\rho}_{ef} + \tilde{p}_{ef}) = 0 \quad (5.86)$$

	EoS Einstein frame	EoS Jordan frame
I	$\infty > w_{ef} \geq 1$	$-\frac{2}{3} > \tilde{w}_{ef} \geq -1$
II	$1 \geq w_{ef} > \frac{1}{3}$	$-1 \geq \tilde{w}_{ef} > -\infty$
III	$\frac{1}{3} > w_{ef} \geq 0$	$\infty > \tilde{w}_{ef} \geq 0$
IV	$0 \geq w_{ef} \geq -\frac{1}{3}$	$0 \geq \tilde{w}_{ef} \geq -\frac{1}{3}$
V	$-\frac{1}{3} \geq w_{ef} \geq -1$	$-\frac{1}{3} \geq \tilde{w}_{ef} \geq -\frac{1}{2}$

Tabela 5.1: Correspondencia entre diferentes faixas para o parâmetro da equação de estado w_{ef} do referencial de Einstein e os correspondentes parâmetros da equação de estado \tilde{w}_{ef} no referencial de Jordan para $w_m = 0$.

com uma pressão efetiva dada por

$$\tilde{p}_{ef} = \tilde{w}_{ef} \tilde{\rho}_{ef} . \quad (5.87)$$

Estas equações da teoria escalar tensorial possuem soluções do tipo potência de forma equivalente às da RG. O meio cósmico como um todo é descrito pelo parâmetro da equação de estado (5.64). Por cálculos diretos confirmamos que usando (5.14) junto com as soluções (5.31) e (5.33), a relação de conservação (5.8) é satisfeita de maneira consistente, correspondendo a

$$\tilde{\rho}_m \propto \tilde{a}^{-3(1+w_m)} . \quad (5.88)$$

Vamos definir a densidade de energia $\tilde{\rho}_x$ como a diferença

$$\tilde{\rho}_x \equiv \tilde{\rho}_{ef} - \tilde{\rho}_m . \quad (5.89)$$

Isto significa que a densidade de energia efetiva $\tilde{\rho}_{ef}$ é a soma da contribuição da matéria com a nova componente x . A partir do conhecimento da dinâmica cosmológica total, dado por \tilde{w}_{ef} , e também a partir da dinâmica do subsistema da matéria que se conserva isoladamente, dado por w_m , podemos determinar a dinâmica do subsistema com densidade de energia dada por $\tilde{\rho}_x$. Assumindo a equação de estado $\tilde{p}_x = \tilde{w}_x \tilde{\rho}_x$, é então possível calcular o parâmetro \tilde{w}_x . Por

$$\tilde{w}_{ef} = \frac{\tilde{p}_{ef}}{\tilde{\rho}_{ef}} , \quad \tilde{p}_{ef} = \tilde{p}_m + \tilde{p}_x , \quad \tilde{\rho}_{ef} = \tilde{\rho}_m + \tilde{\rho}_x \quad (5.90)$$

temos

$$\tilde{w}_{ef} = w_m \frac{\tilde{\rho}_m}{\tilde{\rho}_{ef}} + \tilde{w}_x \frac{\tilde{\rho}_x}{\tilde{\rho}_{ef}} \quad \Rightarrow \quad \tilde{w}_x = (1 + r_{ef}) \tilde{w}_{ef} - w_m r_{ef} , \quad (5.91)$$

onde

$$r_{ef} \equiv \frac{\tilde{\rho}_m}{\tilde{\rho}_x} \quad (5.92)$$

é a razão das densidades de energia das duas componentes. Por (5.89), obtemos

$$r_{ef} = \frac{\tilde{\rho}_m}{\tilde{\rho}_{ef} - \tilde{\rho}_m} = \frac{\frac{\tilde{\rho}_m}{\tilde{\rho}_{ef}}}{1 - \frac{\tilde{\rho}_m}{\tilde{\rho}_{ef}}} \quad \text{e} \quad 1 + r_{ef} = \frac{1}{1 - \frac{\tilde{\rho}_m}{\tilde{\rho}_{ef}}} . \quad (5.93)$$

Com as soluções (5.88) e (5.73) a razão $\frac{\tilde{\rho}_m}{\tilde{\rho}_{ef}}$ varia como

$$\frac{\tilde{\rho}_m}{\tilde{\rho}_{ef}} = \frac{\tilde{\rho}_{m0}}{\tilde{\rho}_{ef0}} \tilde{a}^{-3(w_m - \tilde{w}_{ef})} , \quad (5.94)$$

onde $\frac{\tilde{\rho}_{m0}}{\tilde{\rho}_{ef0}}$ é a presente razão entre a densidade de energia da matéria com a energia total. O valor do fator de escala atual \tilde{a}_0 foi normalizado e, portanto é dado por $\tilde{a}_0 = 1$. Consequentemente para $w_m = 0$,

$$\tilde{w}_x = \frac{\tilde{w}_{ef}}{1 - \frac{\tilde{\rho}_{m0}}{\tilde{\rho}_{ef0}} \tilde{a}^{3\tilde{w}_{ef}}} = \frac{\tilde{w}_{ef}}{1 - \frac{\tilde{\rho}_{m0}}{\tilde{\rho}_{ef0}} \left(\frac{1}{1+z}\right)^{3\tilde{w}_{ef}}} = \frac{\frac{2\tilde{q}-1}{3}}{1 - \tilde{\Omega}_{m0} \left(\frac{1}{1+z}\right)^{(2\tilde{q}-1)}} \quad (w_m = 0) , \quad (5.95)$$

onde z é o parâmetro de redshift e $\tilde{\Omega}_{m0} \equiv \frac{\tilde{\rho}_{m0}}{\tilde{\rho}_{ef0}}$. Como consequência imediata, se $\tilde{w}_{ef} = 0$ (era da matéria), então $\tilde{w}_x = 0$. Contudo, \tilde{w}_x não é constante para $\tilde{w}_{ef} \neq 0$. O parâmetro da equação de estado hoje, é dado por

$$\tilde{w}_{x0} = \frac{\tilde{w}_{ef}}{1 - \tilde{\Omega}_{m0}} \quad (w_m = 0) . \quad (5.96)$$

Para a presente expansão acelerada, isto é, $\tilde{w}_{ef} < -\frac{1}{3}$ temos $|\tilde{w}_{x0}| > |\tilde{w}_{ef}|$, isto é, \tilde{w}_{x0} é mais negativo que \tilde{w}_{ef} , desde que $\tilde{\Omega}_{m0} < 1$. Isto significa que a componente x , de origem geométrica, procede como energia escura. Agora devemos fazer uma comparação com o modelo Λ CDM. O parâmetro da equação de estado deste último modelo é $w_{\Lambda\text{CDM}}$ que é dado por

$$w_{\Lambda\text{CDM}} = \frac{p_{\Lambda}}{\rho_{\Lambda} + \rho_{m0}} . \quad (5.97)$$

Com $p_{\Lambda} = -\rho_{\Lambda}$ e a partir de dados experimentais, $\rho_{m0} \approx \frac{1}{3}\rho_{\Lambda}$, o parâmetro efetivo total da equação de estado do modelo Λ CDM no presente momento é $w_{\Lambda\text{CDM}} \approx -\frac{3}{4}$. Usando este último valor para \tilde{w}_{ef} em (5.96), encontramos $\tilde{w}_{x0} \approx -1$ se $\tilde{\Omega}_{m0} = 0.25$. Consequentemente, a solução da teoria escalar tensorial para a época atual é compatível com a relatividade geral baseada no modelo Λ CDM, porém o parâmetro da equação de estado \tilde{w}_x , que é equivalente ao da energia escura, varia com o tempo. Para uma solução futura $\tilde{w}_{ef} = -1$ (expansão exponencial), teremos $\tilde{w}_x < -1$. Para $\tilde{a} \gg 1$ o parâmetro \tilde{w}_x aproxima de \tilde{w}_{ef} pelo lado fantasma. Neste modelo, temos uma solução do tipo potência para o meio cósmico como um todo, correspondendo a um parâmetro da equação de estado \tilde{w}_{ef} que é constante. Também, o parâmetro da equação de estado da energia escura geometrizada varia com o tempo de acordo com (5.95).

5.6 OBSERVAÇÕES

O último passo consiste em testar a solução tipo potência com os dados das supernovas tipo Ia (SNIa) e comparar os resultados com a análise do modelo Λ CDM. A quantidade importante é a distância luminosa, pois é esta distância que realmente pode ser medida pelos instrumentos. Em um universo plano ela é dada por

$$\tilde{d}_L = (1+z) \int \frac{dz}{\tilde{H}} . \quad (5.98)$$

De acordo com (5.73) e (5.74) o parâmetro de Hubble é

$$\tilde{H} = \tilde{H}_0 \tilde{a}^{-\frac{3}{2}(1+\tilde{w}_{\text{ef}})} = \tilde{H}_0 (1+z)^{\frac{3}{2}(1+\tilde{w}_{\text{ef}})} . \quad (5.99)$$

Por (5.67), (5.98) e (5.99) encontramos

$$\tilde{d}_L = \frac{1+z}{\tilde{H}_0} \frac{1}{(-\tilde{q}_0)} \left[(1+z)^{-\tilde{q}_0} - 1 \right] . \quad (5.100)$$

Assim a distância luminosa é bem conhecida. O interesse é aplicar esta equação para o momento presente. Expandindo em potências de z , obtemos a distância luminosa até a terceira ordem de z

$$\tilde{d}_L = \frac{z}{\tilde{H}_0} \left[1 + \frac{1}{2} (1 - \tilde{q}_0) z + \frac{1}{6} (\tilde{q}_0^2 - 1) z^2 + \dots \right] . \quad (5.101)$$

A expressão correspondente no modelo Λ CDM é [108, 109]

$$\tilde{d}_L = \frac{z}{\tilde{H}_0} \left[1 + \frac{1}{2} (1 - \tilde{q}_0) z + \frac{1}{6} (3(\tilde{q}_0 + 1)^2 - 5(\tilde{q}_0 + 1)) z^2 + \dots \right] . \quad (5.102)$$

Até a segunda ordem, a distância luminosa dos dois modelos coincidem, porém diferem na terceira ordem.

A seguir usaremos a amostra de 182 SN Ia [111]. A quantidade crucial para nossa análise é a distância módulo $\bar{\mu}$, que é obtida a partir da distância luminosa \tilde{d}_L e é dada por

$$\bar{\mu} = 5 \log \left(\frac{\tilde{d}_L}{Mpc} \right) + 25 . \quad (5.103)$$

A fim de comparar os resultados teóricos com as observações, nós efetuamos a análise χ^2 , baseada na expressão

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(\bar{\mu}_{0,i}^o - \bar{\mu}_{0,i}^t)^2}{\sigma_{\mu_{0,i}}^2} . \quad (5.104)$$

χ^2 é uma função estatística que dá a qualidade do ajuste do dado observacional pelo modelo teórico. A quantidade $\bar{\mu}_{0,i}^o$ é a medida distância módulo para cada supernova dos dados das 182 [111]. $\bar{\mu}_{0,i}^t$ são os correspondentes valores teóricos e $\sigma_{\mu_{0,i}}^2$ representa a medida dos erros [111, 112]. A função densidade de probabilidade (PDF) para nosso caso com os parâmetros livres \tilde{H}_0 e \tilde{q}_0 é definida por

$$P(\tilde{H}_0, \tilde{q}_0) = A e^{-\chi^2(\tilde{H}_0, \tilde{q}_0)} , \quad (5.105)$$

Onde A é uma constante de normalização. A marginalização sobre um dos dois parâmetros livres conduzirá às correspondentes representações unidimensionais da densidade de probabilidade. Os detalhes das análises são dadas em [113].

Fig. 5.1 mostra a função distribuição de probabilidade bidimensional para \tilde{q}_0 e h . Aqui h é definido por $\tilde{H}_0 = 100h \text{ km/Mpc/s}$. O melhor valor do ajuste (minimo para χ^2) é $\chi^2 = 3.3054$, que implica $\tilde{q}_0 = -0.31939$ e $h = 0.640359$. Os valores correspondentes para o modelo ΛCDM são $\chi^2 = 3.297$ com $\tilde{\Omega}_{m0} = 0.31$, equivalente a $\tilde{q}_0 = -0.535$, e $h = 0.645$. Para nosso modelo de potências, o presente valor absoluto do parâmetro desaceleração é menor que o do modelo ΛCDM . As distribuições de probabilidades unidimensionais para \tilde{q} e h do nosso modelo estão mostradas nas figuras 5.2 e 5.3, respectivamente. Os valores máximos são $\tilde{q}_0 = -0.392037$ e $h = 0.639022$.

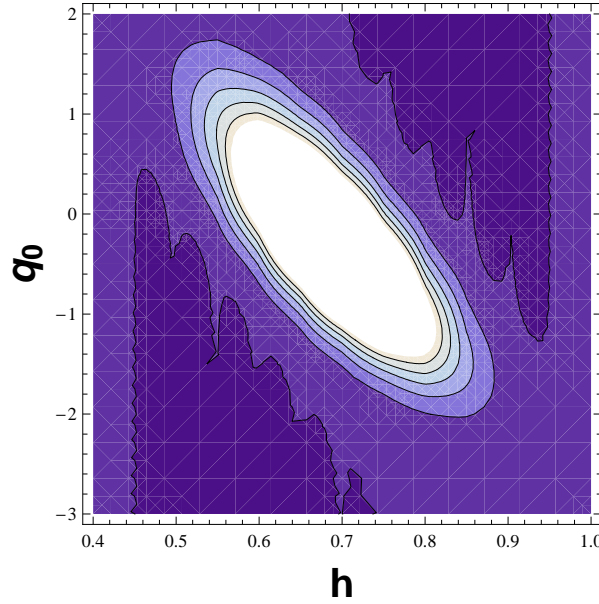


Figura 5.1: Função distribuição de probabilidade bidimensional para \tilde{q}_0 e h . O melhor ajuste corresponde a $\tilde{q}_0 = -0.31939$ e $h = 0.640359$.

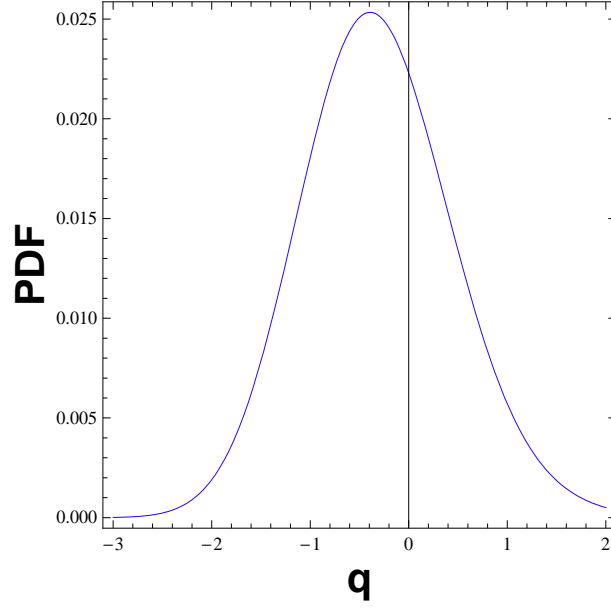


Figura 5.2: Função distribuição de probabilidade unidimensional para \tilde{q}_0 . A probabilidade é máxima para $\tilde{q}_0 = -0.392037$.

5.7 CONCLUSÃO

Neste trabalho, foi resolvida a dinâmica da teoria escalar tensorial sob a condição de que a razão entre a densidade de energia da matéria e a densidade de energia do campo escalar, no referencial de Einstein, é constante. Os parâmetros da equação de estado $\tilde{w}_m = w_m$ e w_ϕ foram supostos constantes. Portanto, os parâmetros efetivos \tilde{w}_{ef} e w_{ef} também são constantes.

As soluções no referencial de Einstein foram transformadas para o referencial de Jordan. Para o caso da matéria não relativística (sem pressão), a relação entre os dois parâmetros efetivos é dada por $\tilde{w}_{ef} = \frac{2w_{ef}}{1-3w_{ef}}$. A solução $\tilde{w}_{ef} = -1$ foi obtida com $w_{ef} = 1$, $w_m = 0$ e \tilde{H} constante. Neste caso há uma expansão exponencial acelerada no referencial de Jordan e uma contração desacelerada no referencial de Einstein. Outros casos envolvendo $w_m = 0$ foram discutidos. A aceleração do universo no referencial de Jordan ocorre se $\tilde{w}_{ef} < -\frac{1}{3}$, e no caso mais simples de matéria sem pressão $w_m = 0$, a teoria escalar tensorial prediz que ela existe sem a presença de energia escura, pelo menos neste modelo. No referencial de jordan, usando equações na forma da relatividade geral, foi identificada uma componente que pode ser chamada de energia escura geometrizada, e esta componente possui um parâmetro da equação de estado \tilde{w}_x que depende do tempo e de \tilde{w}_{ef} . Este parâmetro possui um valor similar ao do modelo Λ CDM no presente momento, porém ele varia com o tempo.

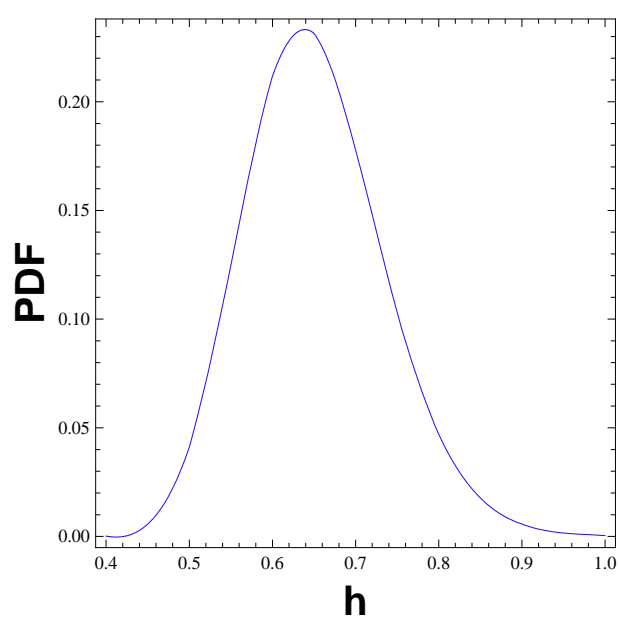


Figura 5.3: Função e distribuição de probabilidade unidimensional para h . A probabilidade é máxima para $h = 0.639022$.

Capítulo 6

ENERGIA NEGATIVA

6.1 INTRODUÇÃO

Deduções indiretas do procedimento das componentes escuras sugerem características pouco usuais. Por exemplo, a pressão da matéria escura hoje deve ser próxima de zero, da mesma maneira que a componente bariônica. Todavia, em contraste com os bárions, a matéria escura se desacopla da radiação muito antes do período dominado pela matéria, e este procedimento é essencial para haver uma explicação coerente da formação das estruturas.

A questão é: as características pouco conhecidas do setor escuro podem incluir densidade de energia negativa? A razão para fazer esta pergunta é devida a questões teóricas e observacionais. Primeiramente, do ponto de vista teórico, existem modelos que procuram resolver o problema da coincidência utilizando densidade de energia negativa [4,5]. Do ponto de vista observacional, há indicações de que possa existir densidade de energia negativa. Isto já acontece a nível do modelo Λ CDM (veja figura 1).

É claro que densidades de energias negativas devem trazer vários problemas, o mais importante é a presença de instabilidades a nível quântico e mesmo clássico; esta é uma das principais razões responsáveis pelo assunto ser pouco mencionado. Há algumas esperanças para que estas instabilidades estejam ausentes em algumas situações, pelo menos quando a condição de energia nula é violada, e quando o fluido é motivado por teorias de cordas [37]. Este assunto não será tratado aqui. Nosso objetivo é mais simples: desenvolver um modelo teste que deve incorporar a possibilidade de energia negativa, através de um campo escalar. Uma constante cosmológica com sinal negativo, também será levada em conta, bem como a possibilidade de densidade de energia escura negativa. O modelo é puramente clássico e

será testado com os dados das supernovas tipo Ia e com os dados de 2dFGRS. Os resultados indicam que valores negativos para Λ são altamente admitidos quando são usados dados de 2dFGRS. Por outro lado, quando são usados dados de SNIa, valores negativos para Λ são bastante restringidos.

6.2 DOIS FLUIDOS SEM PRESSÃO

As equações de Einstein, na ausência de pressão, e com a presença de um campo escalar com curvatura zero e da métrica de Robertson-Walker na convenção (+ - - -), podem ser escritas na forma

$$3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = 8\pi G\rho + \epsilon \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \quad (6.1)$$

$$2 \frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = -\epsilon \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi). \quad (6.2)$$

Nestas expressões ϕ é o campo escalar, $V(\phi)$ o potencial e a o fator de escala. Como não há pressão, a densidade de matéria ρ pode ser escrita como $\rho = \rho_0/a^3$, onde ρ_0 é uma constante. Se $\epsilon = 1$, então o campo escalar é do tipo ‘normal’, enquanto que se $\epsilon = -1$, o campo é do tipo fantasma com termo cinético negativo. Admitindo $a = a_0 t^{2/3}$, as equações (6.1,6.2) se tornam

$$\frac{4}{3} \frac{1}{t^2} = \frac{8\pi G\rho_0}{a_0^3} \frac{1}{t^2} + \epsilon \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \quad (6.3)$$

$$0 = -\epsilon \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \quad (6.4)$$

e representam o período dominado pela matéria (pressão zero). consequentemente por (6.4),

$$\epsilon \frac{\dot{\phi}^2}{2} = V(\phi). \quad (6.5)$$

A convenção é que t_0 representa o tempo cósmico hoje, e o atual fator de escala a_{t_0} é dado por $a_{t_0} = a_0 t_0^{2/3} = 1$. Logo,

$$a_0 t_0^{2/3} = 1 \mapsto a_0 = t_0^{-2/3}. \quad (6.6)$$

O parâmetro de Hubble hoje ($t = t_0$) é dado por

$$H_0 = \frac{\dot{a}_{t_0}}{a_{t_0}}, \quad (6.7)$$

portanto o tempo atual é escrito na forma

$$t_0 = \frac{2}{3}H_0^{-1}. \quad (6.8)$$

Por (6.3) e (6.4), obtem-se

$$\frac{4}{3} \frac{1}{t^2} = \frac{4}{9} \frac{8\pi G \rho_0}{H_0^2 t^2} + \epsilon \dot{\phi}^2. \quad (6.9)$$

Definindo o parâmetro densidade como

$$\Omega_0 = \frac{8\pi G \rho_0}{3H_0^2}, \quad (6.10)$$

a relação (6.9) se torna

$$\frac{4}{3} \frac{1}{t^2} = \frac{4}{3} \frac{\Omega_0}{t^2} + \epsilon \dot{\phi}^2, \quad (6.11)$$

dando origem a

$$\dot{\phi} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}t} \sqrt{\epsilon(1 - \Omega_0)} \quad (6.12)$$

que por sua vez conduz a

$$\phi - \phi_0 = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\epsilon(1 - \Omega_0)} \ln t. \quad (6.13)$$

Ao ser invertida, esta equação deve ser escrita como

$$t = \exp \left[\pm \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\phi - \phi_0}{\sqrt{\epsilon(1 - \Omega_0)}} \right]. \quad (6.14)$$

Usando o fato de que

$$\epsilon \frac{\dot{\phi}^2}{2} = V(\phi), \quad (6.15)$$

ou seja, a pressão do campo escalar é zero, então o potencial deve ser

$$V(\phi) = \frac{2}{3}(1 - \Omega_0) \exp \left[\mp \sqrt{3} \frac{\phi - \phi_0}{\sqrt{\epsilon(1 - \Omega_0)}} \right]. \quad (6.16)$$

Ao aplicar as derivadas primeira e segunda obtemos

$$V_\phi = \frac{\partial V}{\partial \phi} = \mp \sqrt{\frac{3}{\epsilon(1 - \Omega_0)}} V(\phi) \quad (6.17)$$

e

$$V_{\phi\phi} = \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = \frac{3}{\epsilon(1 - \Omega_0)} V(\phi). \quad (6.18)$$

Também podemos escrever o fator de escala $a = a_0 t^{2/3}$ em função de uma grandeza chamada de tempo conforme que é definida como

$$\eta = \int \frac{dt}{a}, \quad (6.19)$$

então

$$\frac{t}{t_0} = \left(\frac{\eta}{3t_0} \right)^3 \quad (6.20)$$

e o fator de escala deve ser escrito na forma

$$a = \frac{\eta^2}{9t_0^2}. \quad (6.21)$$

Por sua vez, o campo escalar se torna

$$\phi - \phi_0 = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\epsilon(1 - \Omega_0)} \ln \left[\frac{\eta^3}{27t_0^2} \right], \quad (6.22)$$

e o potencial é escrito como

$$V(\eta) = \frac{2}{3} (1 - \Omega_0) \frac{t_0^4 3^6}{\eta^6}. \quad (6.23)$$

A partir de $V(\phi)$ e da definição de η , surgem as equações abaixo:

$$V a^2 = 6 \frac{(1 - \Omega_0)}{\eta^2}, \quad (6.24)$$

$$V_\phi a^2 = \mp 6\sqrt{3} \frac{\sqrt{\epsilon(1 - \Omega_0)}}{\eta^2}, \quad (6.25)$$

$$V_{\phi\phi} a^2 = \frac{18\epsilon}{\eta^2}. \quad (6.26)$$

A derivada em relação a η do campo ϕ , é dada por

$$\phi' = \pm 2\sqrt{3} \frac{\sqrt{\epsilon(1 - \Omega_0)}}{\eta}. \quad (6.27)$$

6.3 INCLUINDO A CONSTANTE COSMOLÓGICA

O modelo acima possui um problema: ele não é capaz de explicar a aceleração do universo já que $a \propto t^{2/3}$. A fim de encontrarmos soluções que predizem a aceleração do universo incluiremos uma constante cosmológica nas equações de Einstein. Usando novamente a métrica de R.W. para um universo plano encontramos

$$3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = 8\pi G\rho + \epsilon \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) + \Lambda, \quad (6.28)$$

$$2 \frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = -\epsilon \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) + \Lambda, \quad (6.29)$$

$$\ddot{\phi} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi} = -\epsilon V_\phi(\phi). \quad (6.30)$$

Da mesma forma como antes, adotaremos que a pressão do campo escalar é nula $p_\phi = 0$. Isto implica novamente que $V = \frac{\epsilon}{2} \dot{\phi}^2$ e, portanto

$$\dot{V} + 3 \frac{\dot{a}}{a} V = 0. \quad (6.31)$$

com solução

$$V = V_0 a^{-3}. \quad (6.32)$$

A equação de Friedmann, deve agora, ser escrita na forma

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{\Omega_{m0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda 0}. \quad (6.33)$$

Para obter tal equação foi necessário dividir (6.28) por H_0^2 e redefinir o tempo coordenada na forma $H_0 t \rightarrow t$. Os parâmetros densidades podem ser escritos como:

$$\Omega_{m0} = \Omega_0 + \Omega_{\phi 0}, \quad \Omega_0 = \frac{8\pi G\rho a^3}{3H_0^2}, \quad \Omega_{\phi 0} = \frac{\epsilon}{3} \dot{\phi}^2 a^3 = \frac{2}{3} V a^3, \quad \Omega_{\Lambda 0} = \frac{\Lambda}{3H_0^2}. \quad (6.34)$$

Também foi feito a redefinição $\frac{V}{H_0^2} \rightarrow V$. A solução de (6.33) admite a solução:

$$a = \left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{\Lambda 0}} \right)^{1/3} \sinh^{2/3} \left(\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_{\Lambda 0} t} \right). \quad (6.35)$$

No limite $\Omega_{\Lambda 0} \rightarrow 0$, que implica $\Omega_{m0} \rightarrow 1$ obtemos

$$a(t) = \left(\frac{3}{2}t\right)^{2/3}, \quad (6.36)$$

onde $a(t = t_0) = 1$ e $3t_0/2 = 1$. Como a pressão do campo escalar é zero ($p_\phi = 0$), temos

$$\frac{\epsilon}{3}\dot{\phi}^2 = \frac{\Omega_{\phi 0}}{a^3}. \quad (6.37)$$

Ao integrar esta relação e usando (6.35) encontramos

$$\phi - \phi_0 = \pm \frac{2}{3} \sqrt{\frac{3\epsilon\Omega_{\phi 0}}{\Omega_{m0}}} \ln \left[\frac{\tanh\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\tanh\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} \right], \quad (6.38)$$

onde

$$\theta \equiv \frac{3}{2} \sqrt{\Omega_{\Lambda 0} t}. \quad (6.39)$$

θ_0 está relacionado ao tempo t_0 no qual $\phi = \phi_0$. Usando (6.28), (6.29) e (6.38) encontramos o potencial

$$V(\phi) = \frac{2}{3} \frac{\Omega_{\phi 0} \Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}} \left\{ \frac{\cosh g(\phi) - \cosh \theta_0 \sinh g(\phi)}{\sinh \theta_0} \right\}^2, \quad (6.40)$$

onde

$$g(\phi) = \pm \frac{\phi - \phi_0}{r}, \quad r = \sqrt{\frac{4\epsilon\Omega_{\phi 0}}{3\Omega_{m0}}}, \quad \Omega_{m0} = \Omega_{\phi 0} + \Omega_0. \quad (6.41)$$

No limite em que a constante cosmológica tende a zero, o tempo atual tende a $t_0 = 2/3$.

6.4 EQUAÇÕES PERTURBADAS NO CALIBRE SÍNCRONO

Seja as equações abaixo com a presença da constante cosmológica:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} + \epsilon \left(\phi_{;\mu}\phi_{;\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi_{;\rho}\phi^{;\rho} \right) + g_{\mu\nu}\Lambda + g_{\mu\nu}V(\phi), \quad (6.42)$$

$$\phi_{;\rho}^{;\rho} = -\epsilon V_\phi(\phi), \quad (6.43)$$

$$T_{;\mu}^{\mu\nu} = 0, \quad (6.44)$$

que podem ser escritas como

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right) + \phi_{;\mu}\phi_{;\nu} - g_{\mu\nu}V(\phi) - g_{\mu\nu}\Lambda, \quad (6.45)$$

$$\phi_{;\rho}^{;\rho} = -\epsilon V_\phi(\phi), \quad (6.46)$$

$$T_{;\mu}^{\mu\nu} = 0. \quad (6.47)$$

Assumiremos novamente que tanto a pressão da matéria como a do campo escalar são nulas, e as soluções das equações não perturbadas estão na seção anterior. Agora introduzimos as perturbações:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^0, \quad \phi = \phi^0 + \delta\phi, \quad \rho = \rho_0 + \delta\rho, \quad (6.48)$$

onde o índice 0 indica as grandezas não perturbadas. Fazendo $h_{00} = h_{\mu 0} = 0$ (calibre síncrono), surgem as equações perturbadas abaixo

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} = 4\pi G\rho\delta + 2\epsilon\dot{\phi}\dot{\lambda} - V_\phi\lambda, \quad (6.49)$$

$$\ddot{\lambda} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\lambda} + \left(\frac{n^2}{a^2} + \epsilon V_{\phi\phi}\right)\lambda = \dot{\phi}\dot{\delta}. \quad (6.50)$$

Foram utilizadas as seguintes definições:

$$\delta = \frac{\delta\rho}{\rho}, \quad \lambda = \delta\phi. \quad (6.51)$$

O índice 0, que indica as grandezas não perturbadas, foi omitido. A perturbação da constante cosmológica é zero, e n é o vetor de onda. No primeiro caso, equações (6.49)e (6.50), a constante cosmológica está ausente. Passando para o tempo conforme estas relações se tornam

$$\delta'' + \frac{a'}{a}\delta' + \left[-\frac{3}{2}\left(\frac{a'}{a}\right)^2 + \frac{\phi'^2}{4} + \frac{Va^2}{2}\right]\delta = 2\epsilon\phi'\lambda - V_\phi a^2\lambda, \quad (6.52)$$

$$\lambda'' + 2\frac{a'}{a}\lambda' + [n^2 + \epsilon V_{\phi\phi}]\lambda = \phi'\delta'. \quad (6.53)$$

Ao incluir as soluções não perturbadas, elas passam a ter a forma final abaixo:

$$\delta'' + 2\frac{\delta'}{\eta} - 6\Omega_0\frac{\delta}{\eta^2} = 2\epsilon\frac{\lambda'}{\eta} + 3\frac{\lambda}{\eta^2}, \quad (6.54)$$

$$\lambda'' + 4\frac{\lambda'}{\eta} + \left(n^2 + \frac{18}{\eta^2}\right)\lambda = 12\epsilon(1 - \Omega_0)\frac{\delta'}{\eta}. \quad (6.55)$$

Nas equações acima foi feita a substituição:

$$\pm 2\sqrt{3}\sqrt{\epsilon(1 - \Omega_0)}\lambda \rightarrow \lambda. \quad (6.56)$$

Vamos agora considerar o caso de longos comprimentos de onda, ou seja, $n \rightarrow 0$. A questão é investigar se a presença de densidades de energias negativas pode acelerar a aglomeração de massa, com pressão zero. Neste limite, as equações se tornam

$$\delta'' + 2\frac{\delta'}{\eta} - 6\Omega_0\frac{\delta}{\eta^2} = 2\epsilon\frac{\lambda'}{\eta} + 3\frac{\lambda}{\eta^2}, \quad (6.57)$$

$$\lambda'' + 4\frac{\lambda'}{\eta} + \left(\frac{18}{\eta^2}\right)\lambda = 12\epsilon(1 - \Omega_0)\frac{\delta'}{\eta}. \quad (6.58)$$

Vamos supor soluções na forma de potências:

$$\delta = \delta_0\eta^r, \quad \lambda = \lambda_0\eta^r, \quad (6.59)$$

onde δ_0 , λ_0 e r são constantes. Desta forma obtemos a seguinte expressão polinomial para r :

$$r^4 + 4r^3 - (1 - 6\Omega_0)r^2 - 18(1 - \Omega_0)(1 - 2\epsilon)r - 108\Omega_0 = 0. \quad (6.60)$$

Considerando o termo cinético positivo, $\epsilon = 1$, o polinômio acima deve ser escrito como

$$(r^2 + r - 6)(r^2 + 3r + 18\Omega_0) = 0. \quad (6.61)$$

As raízes são as seguintes:

$$r_1 = 2, \quad r_2 = -3, \quad r_{\pm} = \frac{3}{2}(-1 \pm \sqrt{1 - 8\Omega_0}). \quad (6.62)$$

As raízes $r_{1,2}$ correspondem às soluções usuais para contraste densidade para um fluido sem pressão. As soluções r_{\pm} correspondem à presença do campo escalar. Elas representam oscilações decrescentes a menos que $\Omega_0 < 0$, isto é, a densidade de energia da matéria possui valor negativo. Neste caso tem-se soluções que crescem com o tempo, e o parâmetro densidade $\Omega_{\phi 0}$ é maior do que 1 desde que

$$\Omega_0 + \Omega_{\phi 0} = 1. \quad (6.63)$$

No momento do desacoplamento, $t_i \approx 10^{11}s$, e a contraste densidade possui um valor da ordem $\delta_i \approx 10^{-5}$. Na usual teoria, a contraste densidade cresce na forma $\delta \propto t^{2/3}$ no período dominado pela matéria, resultado também obtido aqui. Então,

$$\delta = 10^{-5} \left(\frac{t}{t_i}\right)^{2/3}. \quad (6.64)$$

Hoje $t \approx 10^{17}s$, e consequentemente $\delta \approx 10^{-1}$ atualmente. Portanto, o regime não linear não teria sido atingido ainda, em contradição com a existência das galáxias. Esta é uma das

razões que levaria a matéria escura a se desacoplar da radiação ainda no período radiativo. Todavia, se colocarmos $\Omega_0 = -1$ na relação (6.62), obtemos um crescimento com $r = 3$, que implica $\delta \propto \eta^3 \propto t$. Então a nova contraste densidade é dada por

$$\delta = 10^{-5} \frac{t}{t_i}, \quad (6.65)$$

e portanto hoje $\delta \approx 10$. Logo o regime não linear já teria ocorrido há bastante tempo atrás.

6.5 ANÁLISE DO ESPECTRO DE POTÊNCIA E DADOS DE SNIA

As equações perturbadas com a presença da constante cosmológica são dadas por

$$\delta'' + \frac{a'}{a} \delta' - \frac{3}{2} \Omega_0 \frac{\delta}{a} = 2\epsilon \phi' \lambda' - a^2 V_\phi \lambda, \quad (6.66)$$

e

$$\lambda'' + 2 \frac{a'}{a} \lambda' + \{n^2 + \epsilon V_{\phi\phi} a^2\} \lambda = \phi' \delta'. \quad (6.67)$$

Novamente as linhas significam derivada com relação ao tempo conforme η . O objetivo é transformar as equações acima para outras equações com derivadas em relação ao fator de escala a ao invés de derivadas em relação ao tempo conforme η . A transformação é feita utilizando a regra

$$F' = \frac{dF}{d\eta} = \frac{dF}{da} \frac{da}{d\eta} = a' \dot{F}, \quad (6.68)$$

$$F'' = \frac{dF'}{d\eta} = a'' \dot{F} + a'^2 \ddot{F}, \quad (6.69)$$

onde $F(a)$ representa uma função qualquer. Agora o ponto significa derivada em relação ao fator de escala a . As relações (6.28) e (6.19) junto com as definições acima dão origem às equações:

$$\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{\Omega_0 + \Omega_{\phi 0}}{a} + \Omega_{\Lambda 0} a^2, \quad (6.70)$$

e

$$2 \frac{a''}{a} - \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = 3\Omega_{\Lambda 0} a^2. \quad (6.71)$$

Foi feita a transformação $\eta H_0 \rightarrow \eta$. A partir destas expressões encontramos

$$f(a) = a' = \left[\Omega_{m0} a + \Omega_{\Lambda 0} a^4 \right]^{1/2}, \quad (6.72)$$

e

$$g(a) = a'' = \frac{\Omega_{m0}}{2} + 2\Omega_{\Lambda 0}a^3, \quad (6.73)$$

onde $\Omega_{m0} = \Omega_0 + \Omega_{\phi 0}$. O potencial do campo escalar para $p_\phi = 0$ é dado por

$$V(a) = \frac{3}{2} \frac{\Omega_{\phi 0}}{a^3}. \quad (6.74)$$

A derivada do potencial $V(a)$ em relação a ϕ é

$$V_\phi = V_a \frac{da}{d\phi} = V_a \frac{da}{d\eta} \frac{d\eta}{d\phi} = V_a \frac{a'}{\phi'} = -\frac{9}{2} \frac{\Omega_{\phi 0}}{a^4} \frac{1}{h(a)}, \quad (6.75)$$

onde

$$h(a) = \frac{\phi'}{a'} = \frac{1}{f(a)} \sqrt{\frac{3\epsilon\Omega_{\phi 0}}{a}}. \quad (6.76)$$

De maneira similar encontramos a derivada segunda em relação a ϕ :

$$V_{\phi\phi} = -\frac{V_a}{h^2} \left\{ \frac{4}{a} + \frac{\dot{h}}{h} \right\}. \quad (6.77)$$

As equações (6.66), (6.67) junto com as (6.68) e (6.69) dão origem a

$$\ddot{\delta} + \left\{ \frac{g}{f^2} + \frac{1}{a} \right\} \dot{\delta} - \frac{3}{2} \Omega_0 \frac{\delta}{af^2} = 2\epsilon h \dot{\lambda} - \frac{a^2}{f^2} V_\phi \lambda, \quad (6.78)$$

e

$$\ddot{\lambda} + \left\{ \frac{g}{f^2} + \frac{2}{a} \right\} \dot{\lambda} + \left\{ \frac{n^2}{f^2} + \epsilon \frac{a^2}{f^2} V_{\phi\phi} \right\} \lambda = h \dot{\delta}, \quad (6.79)$$

onde agora, o ponto significa derivada em relação ao fator de escala a .

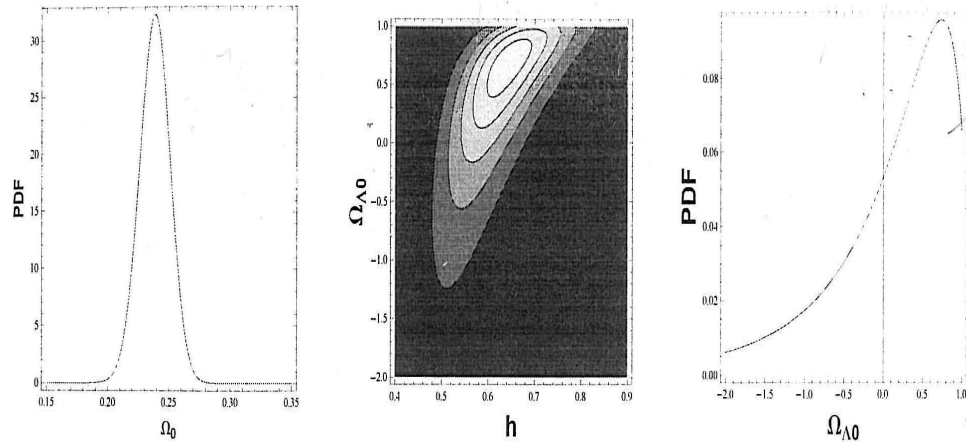


Figura 6.1: Função distribuição de probabilidade unidimensional (PDF) para Ω_0 no modelo Λ CDM usando dados de 2dFGRS (esquerda). No centro ocorre a distribuição bidimensional para h e $\Omega_{\Lambda 0}$ usando dados de SNIa. À direita, a distribuição de probabilidade unidimensional para $\Omega_{\Lambda 0}$.

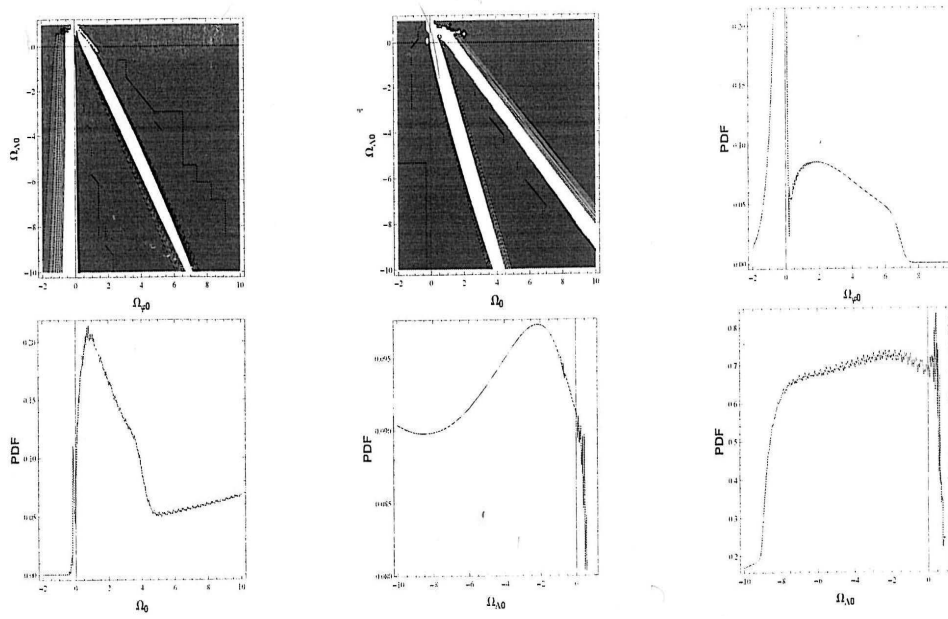


Figura 6.2: Função distribuição de probabilidade unidimensional e bidimensional (PDF) usando dados do espectro de potência. No centro o PDF obtido para $\Omega_{\Lambda 0}$ variando $\Omega_{\phi 0}$ e à direita o PDF obtido para $\Omega_{\Lambda 0}$ variando Ω_0 .

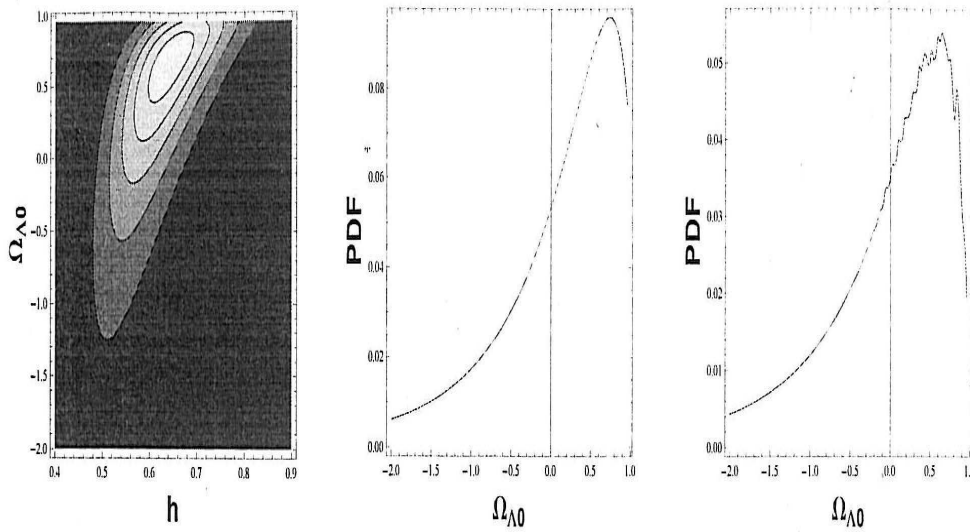


Figura 6.3: Função distribuição de probabilidade bidimensional para $\Omega_{\Lambda 0}$ e h usando dados de SNIa à esquerda. No centro ocorre a função distribuição unidimensional usando também dados de SNIa, e à direita o PDF para $\Omega_{\Lambda 0}$ usando dados de SNIa e de 2dFGRS combinadas.

Existem três parâmetros livres: Ω_0 , $\Omega_{\phi 0}$ e $\Omega_{\Lambda 0}$, e como vivemos em um universo plano, de acordo com dados da anisotropia da radiação de fundo e das SNIa e dos dados do WMAP, então $\Omega_0 + \Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{\phi 0} = 1$. Na análise dos dados das SNIa também há dois parâmetros livres: a densidade da constante cosmológica (ou de forma equivalente o parâmetro da matéria sem pressão) e o parâmetro de Hubble reduzido h ($H_0 = 100h \text{ km/Mpc.s}$).

Vamos primeiro fazer uma análise do modelo Λ CDM, onde $\Omega_{\phi 0} = 0$ e $\Omega_0 = 1 - \Omega_{\Lambda 0}$. Vamos também considerar os dados obtidos por *2dFGRS* e pelas supernovas tipo Ia. A figura 1 mostra a distribuição de probabilidade unidimensional para a componente matéria usando dados de 2dFGRS, junto com a distribuição de probabilidade bidimensional para o parâmetro de Hubble reduzido h e $\Omega_{\Lambda 0}$, bem como o correspondente unidimensional PDF para o parâmetro da constante cosmológica usando dados da SNIa. O melhor cenário, usando dados do 2dFGRS, é obtido para $\Omega_0 = 0.24$ com $\chi^2_{min} = 0.38$ e, usando dados de SNIa, $\Omega_0 = 0.31$ com $\chi^2_{min} = 1.13$, em acordo com os dados conhecidos.

Vamos voltar para o modelo sem pressão, com constante cosmológica e campo escalar com também pressão nula. A fim de impor condições iniciais para a análise do espectro de potência, usamos o procedimento descrito na referência [55]. O PDF bidimensional e

unidimensional usando dados do 2dFGRS nos planos $\Omega_{\Lambda 0}$ e Ω_0 , e também nos planos $\Omega_{\Lambda 0}$ e Ω_0 são mostrados na figura 2. Está claro que valores negativos para Ω_0 estão excluídos. Por outro lado, pequenos valores negativos para $\Omega_{\phi 0}$ são permitidos. Valores negativos para $\Omega_{\Lambda 0}$ são também compatíveis com os dados de espectro de potência. A correspondente distribuição unidimensional PDF confirma estas conclusões. O melhor ajuste é obtido com $\Omega_{\phi 0} = 0.06$, $\Omega_0 = 0.24$ e $\Omega_{\Lambda 0} = 0.70$ com $\chi^2_{min} = 0.30$, resultado que é melhor do que o obtido no contexto do modelo Λ CDM. Todavia, a configuração com $\Omega_{\phi 0} = -0.02$, $\Omega_0 = 11.02$ e $\Omega_{\Lambda 0} = -10$ tem $\chi^2 = 0.34$ que é melhor do que o modelo Λ CDM, mas a qualidade do ajuste se torna rapidamente pior já para valores negativos moderados do parâmetro densidade da matéria.

A análise das SNIa possui dois parâmetros livres, o h e o parâmetro densidade [56]. Quando os dados das SNIa são usados, obtemos os gráficos PDF bidimensional e unidimensional mostrado na figura 3, junto com as probabilidades combinadas considerando os dados de 2dFGRS e SNIa.

6.6 DISCUSSÃO

A possibilidade de energias negativas no setor escuro tem sido evocado tanto a nível teórico como observacional. É claro que existem vários problemas conceituais relativo à densidade de energia negativa. De qualquer maneira a necessidade de um fluido exótico na cosmologia é um argumento que deve ser considerado mesmo com a possibilidade de existirem energias negativas.

Desenvolvemos um modelo teste que possui duas componentes sem pressão, um representado pela matéria e outro por um campo escalar, além da presença da constante cosmológica. Permitimos que as três componentes pudessem ter energias negativas, bem como positivas e a análise estatística usou dados tanto de 2dFGRS como das SNIa.

É muito difícil admitir valores negativos para a densidade de energia da matéria, desde que isso implica massa negativa. Porém, há menos resistência em admitir densidade de energia negativa do campo escalar e da constante cosmológica. Todavia, deixamos os dados observacionais definirem quais valores para cada componente é o melhor. As observações restringem consideravelmente valores negativos para Ω_0 , mas permitem pequenos valores negativos para $\Omega_{\phi 0}$. Em relação à constante cosmológica, a análise do espectro de potência permite valores bastante negativos, mas o espectro de potência também restringe fracamente $\Omega_{\Lambda 0}$. Portanto, de acordo com nossa análise, densidade de energia negativa deve ocorrer na natureza, mas principalmente se se refere ao campo, ao invés da matéria, e com um

parâmetro de densidade pequeno comparado com as outras componentes.

Capítulo 7

CONCLUSÃO

O MOND surgiu com o objetivo de explicar a existência das curvas planas de rotação de galáxias, ele se sobressaiu, mas, não podia fazer previsões a respeito do desvio da luz já que é um modelo não relativístico. Em seguida surgiu o AQUAL, que resolve os problemas de não conservação do MOND, e que também é não relativístico. A primeira teoria relativística da família MOND é o RAQUAL. A teoria usa uma transformação conforme, e não foi capaz de prever os fortes desvios da luz pelas galáxias sem utilizar matéria escura. Além do mais carrega problemas de propagação superluminal do campo escalar. A fim de substituí-la, surgiu o PCG que melhorou em relação ao problema da causalidade, mas também não foi capaz de prever o desvio correto da luz. Também falha ao fazer previsões a respeito da precessão do periélio de mercúrio.

Percebeu-se que para se obter o desvio correto da luz sem introduzir matéria escura seria necessário trocar a transformação conforme por uma disforme. Porém não era possível prever o desvio correto da luz e evitar problemas de causalidade ao mesmo tempo. Sanders, entretanto, propôs trocar a derivada do campo escalar por uma campo vetorial e isso fez o truque. A nova transformação disforme era capaz de prever o desvio correto da luz sem carregar consigo o problema de causalidade. É justamente esta transformação que o TeVeS utilizou.

O ponto positivo da teoria é que ela é capaz de explicar a existência das curvas planas de rotação de galáxias, bem como prevê os fortes desvios da luz gerados pelas galáxias sem para isso utilizar matéria escura. Também passa nos testes da escala do sistema solar. Entretanto, parece haver necessidade de se introduzir certa quantidade de matéria escura nos aglomerados de galáxias.

Nesta tese, foi verificado como o TeVeS se comporta quando a razão $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ é constante. Nem

$\rho_2 = \tilde{\rho}e^{-2\phi}$ nem ρ_1 provêm do tensor momento energia ao contrário de $\tilde{T}_{00} = \rho_m = \tilde{\rho}e^{2\phi}$ e ρ_ϕ . Mas, $\rho_2 + \rho_1 = \rho_{ef} = \rho_m + \rho_\phi$. As quantidades $p_2 = p_m = \tilde{p}e^{-2\phi}$ e $p_1 = p_\phi$ têm origem no tensor momento energia, onde $\tilde{T}_{xx} = \tilde{p}e^{-2\phi}a^2$. A vantagem de usar as componentes 1 e 2 é que $\frac{p_2}{\rho_2} = w_2 = \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} = w$. Por outro lado, $\frac{p_m}{\rho_m} = we^{-4\phi}$. É admitido que tanto w quanto w_1 é constante, logo o modelo só pode tratar de uma determinada época de cada vez, e não de transições de épocas. O resultado foi uma solução exponencial para o fator de escala no referencial de Einstein e uma solução de potência no referencial de Jordan. No referencial de Jordan, $\tilde{\rho}$ desenvolve o papel da densidade de energia escura ao contrário do modelo original. Neste caso se geometriza a matéria escura.

O segundo tema tratou de como as teorias escalares tensoriais se comportam quando a razão $\frac{\rho_m}{\rho_\phi}$ é constante. Também foi discutido casos das teorias $f(R)$, que correspondem a $\beta^2 = \frac{1}{4}$, e se percebeu que elas não são capazes de prever a aceleração do universo quando a razão $\frac{\rho_m}{\rho_\phi}$ é constante e $w_m = 0$. Por outro lado, foi mostrado que para outros valores de β com $w_m = 0$, as teorias escalares tensoriais podem prever a aceleração do universo a partir de uma modificação da gravitação e não a partir da presença de uma nova forma de energia. Neste caso ocorre uma geometrização da energia escura.

A seguir foi discutida a possibilidade de ocorrer densidade de energia negativa no setor escuro. O modelo assumiu que tanto ρ_m quanto ρ_ϕ e ρ_Λ poderiam assumir valores negativos. Quando confrontado com o espectro de potência, o modelo prevê alta probabilidade para $\Omega_{\Lambda 0}$ negativo, porém não permite valores negativos para Ω_0 , o que acarretaria massa negativa. Também permite pequenos valores negativos para $\Omega_{\phi 0}$. Quando confrontado com as supernovas tipo Ia prevê baixa probabilidade para $\Omega_{\Lambda 0}$ negativo.

Capítulo 8

APÊNDICE

8.1 TEOREMA VIRIAL

A seguir será demonstrado o teorema virial. Seja a equação

$$\frac{df}{dt} = C[f]. \quad (8.1)$$

Esta é a equação de Boltzmann. O lado direito contém todos os possíveis termos de colisão, e a função $f = f(t, x, p)$ é uma função do tempo, distância e momento. Na ausência de colisão, a função distribuição obedece $\frac{df}{dt} = 0$. Isto poderia representar o caso dos neutrinos pois não colidem entre si. Na ausência de colisão o lado esquerdo da equação (8.1) é escrito como

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} - \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{x}} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0, \quad (8.2)$$

onde Φ é o potencial gravitacional, e $H = \frac{v^2}{2} + \Phi(x, \vec{v})$. Multiplicando (8.2) por v_j e integrando sobre todas as velocidades obtem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int d^3\vec{v} f v_j + \int d^3\vec{v} v_i v_j \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \int d^3\vec{v} v_j \frac{\partial f}{\partial v_i} = 0. \quad (8.3)$$

A última integral de (8.3) pode ser escrita usando o teorema do divergente e admitindo que f se anula para valores grandes de $|\vec{v}|$, então

$$\int d^3\vec{v} v_j \frac{\partial f}{\partial v_i} = - \int d^3\vec{v} \frac{\partial v_j}{\partial v_i} f = - \int d^3\vec{v} \delta_{ij} f = -\delta_{ij} \nu, \quad (8.4)$$

onde ν dá a probabilidade por unidade de volume de encontrar uma estrela particular em \vec{x} sem levar em conta sua velocidade e é dado por:

$$\nu(\vec{x}) = \int d^3\vec{v} f(\vec{x}, \vec{v}). \quad (8.5)$$

Outra relação importante é dada por

$$n(\vec{x}) \equiv N\nu(\vec{x}), \quad (8.6)$$

em que N é o número de estrelas na população. $n(\vec{x})$ pode em princípio ser determinado por contagem de estrelas, e então $\nu(\vec{x})$ pode ser derivado por $n(\vec{x})$. Em galáxias que não é possível contar estrelas, pode-se derivar $\nu(\vec{x})$ a partir da densidade de luminosidade $j(\vec{x}) = L\nu(\vec{x})$, onde L é a luminosidade da população de estrelas. A equação (8.3) deve ser reescrita como

$$\frac{\partial(\nu\bar{v}_j)}{\partial t} + \frac{\partial(\nu v_i \bar{v}_j)}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = 0. \quad (8.7)$$

A eq.(8.7) foi obtida multiplicando a equação de Boltzmann sem colisão por v_j e integrando sobre todas as velocidades. O próximo passo é multiplicar (8.7) por x_k e integrar sobre todas as posições, convertendo estas equações diferenciais em equações tensoriais referindo-se a propriedades gerais de uma galáxia, como a energia cinética total e a velocidade *mean-square straming*. Multiplica-se por Mx_k , onde M é a massa total do sistema. Desde que a densidade de massa é $\rho(\vec{x}) = M\nu(\vec{x})$ e integrando sobre as variáveis espaciais encontra-se

$$\int d^3\vec{x} x_k \frac{\partial(\rho\bar{v}_j)}{\partial t} = - \int d^3\vec{x} x_k \frac{\partial(\rho v_i \bar{v}_j)}{\partial x_i} - \int d^3\vec{x} \rho x_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}. \quad (8.8)$$

O último termo do lado direito é o tensor energia potencial W_{kj} . O primeiro termo do lado direito pode ser rescrito com auxílio do teorema do divergente

$$\int d^3\vec{x} x_k \frac{\partial(\rho v_i \bar{v}_j)}{\partial x_i} = - \int d^3\vec{x} \delta_{ki} \rho v_i \bar{v}_j = -2K_{kj}. \quad (8.9)$$

O tensor energia cinética é definido como

$$K_{jk} \equiv \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \rho v_j \bar{v}_k \quad (8.10)$$

que também pode ser escrito como

$$K_{jk} = T_{jk} + \frac{1}{2} \Pi_{jk}, \quad (8.11)$$

onde

$$T_{jk} \equiv \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \rho \bar{v}_j \bar{v}_k, \quad (8.12)$$

e

$$\Pi_{jk} \equiv \int d^3\vec{x} \sigma_{jk}^2, \quad (8.13)$$

onde

$$\sigma_{ij}^2 = v_i \bar{v}_j - \bar{v}_i \bar{v}_j \quad (8.14)$$

é o tensor velocidade dispersão. As derivadas com respeito ao tempo na equação (8.8) devem ser colocadas para fora da integral pois x_k não depende do tempo. Por (8.8) encontra-se

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int d^3 \vec{x} \rho (x_k \bar{v}_j + x_j \bar{v}_k) = 2T_{jk} + \Pi_{jk} + W_{jk}. \quad (8.15)$$

Seja I , o tensor definido como:

$$I_{jk} \equiv \int d^3 \vec{x} \rho x_j x_k. \quad (8.16)$$

Diferenciando em relação ao tempo,

$$\frac{dI_{jk}}{dt} = \int d^3 \vec{x} \frac{\partial \rho}{\partial t} x_j x_k. \quad (8.17)$$

Também a equação da continuidade é dada por

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + \frac{\partial (\nu \bar{v}_i)}{\partial x_i} = 0, \quad (8.18)$$

onde ν é dado por (8.5). Então com (8.18), o lado direito de (8.17) se torna

$$- \int d^3 \vec{x} \frac{\partial (\rho \bar{v}_i)}{\partial x_i} x_j x_k = \int d^3 \vec{x} \rho \bar{v}_i (x_k \delta_{ji} + x_j \delta_{ki}). \quad (8.19)$$

Substituindo a expressão (8.19) em (8.17) obtém-se

$$\frac{dI_{jk}}{dt} = \int d^3 \vec{x} \rho (x_k \bar{v}_j + x_j \bar{v}_k). \quad (8.20)$$

Agora, combinando (8.15) com (8.20), encontra-se o *teorema virial tensorial*:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I_{jk}}{dt^2} = 2T_{jk} + \Pi_{jk} + W_{jk}. \quad (8.21)$$

A equação (8.21) capacita relacionar as propriedades cinemáticas e morfológicas das galáxias. Em muitos casos o lado esquerdo pode ser zero, desde que não haja dependência temporal. Pela eq.(8.10): O traço do tensor energia potencial é dado por

$$\text{traco}(W) \equiv \sum_{j=1}^{j=3} W_{jj} = \frac{1}{2} \int d^3 \vec{x} \rho(\vec{x}) \Phi(\vec{x}). \quad (8.22)$$

A relação (8.10) mostra que traço (K) \equiv traço(T) + $\frac{1}{2}$ traço (Π) é a energia cinética total do sistema. Se o sistema estiver no seu estado estacionário, então $\ddot{I} = 0$. Neste caso o traço da eq.(8.21) se torna

$$2K_* + W_* = 0. \quad (8.23)$$

Os termos K_* , W_* da equação acima são os traços de K , W que formam tensores. A equação (8.23) é chamada de *teorema virial escalar*.

A energia cinética de um sistema estelar com massa M é $K_* = \frac{1}{2}M \langle v^2 \rangle$ (velocidade quadrática média das estrelas do sistema). Portanto o teorema virial afirma que

$$\langle v^2 \rangle = \frac{|W|}{M} = \frac{GM}{r_g}, \quad (8.24)$$

onde r_g é chamado de raio gravitacional e definido como

$$r_g \equiv \frac{GM^2}{|W|}. \quad (8.25)$$

No caso de uma esfera homogênea de raio a , $r_g = \frac{5}{3}a$.

O uso do teorema virial é capaz de prever a quantidade de matéria em escalas de 10 a 20 Mpc de acordo com [18].

Referências Bibliográficas

- [1] V. Sahni [arXiv:astro-ph/0403324]
- [2] J.D. Bekenstein, Phys. Rev. D, 70, 083509
- [3] F. Schmidt, et al, Phys. Rev. D76: 083518, 2007
- [4] J. Grande, J. Sola, S. Hrvoje, JCAP(2006)011[arXiv:gr-qc/0604057].
- [5] J. Grand, R. Opher, A. Pelison, J. Sola, JCAP08(2007)007[arXiv:gr-qc/070092130].
- [6] B.F. Schutz, Cambridge University Press (1990)
- [7] C. Brans e R.H. Dicke, Phys.Rev. **124**, 925 (1961).
- [8] Weinberg ,S. (1972) , Gravitation and cosmology , WSE WILEY
- [9] J.B. Bekenstein, EAS Plub. Series Publication Vol. 20
- [10] R.H. Dicke, Phys.Rev. **125**, 2163 (1962).
- [11] L.M. Diaz-Rivera, L. Samushia, e B. Ratra, PRD **73**, 083503 (2006).
- [12] J.D. Bekenstein, Comtemp. Phys. 47, 387(2006)[arXiv:astro-ph/0701848]
- [13] C. Skordis, Topical Review(2009)
- [14] Rosa Dominguez Tenreiro e Mariano Quiroz, **An Introduction to Cosmology and Particle Physics**, World Scientific 1988.
- [15] M.Sami, Lect.Notes Phys,vol 72,219, 2007
- [16] R.J.Sherrer, Phys.Rev.Lett. vol 93,011301, 2004
- [17] T.G.Zlosnik , el al,Phys. Rev.D, 044037,2006

- [18] E. Kolb, M. S. Turner, (1994), **The early universe**, (Addison-Wesley Publishing Company).
- [19] S. Dodelson, (2003), **Modern Cosmology**, Academic press
- [20] J.P. Bruneton, G. Esposito-Farèse, Phys. Rev. D78, 124012(20070[arXiv:gr-qc07054043]
- [21] L. Randall, R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. 83, 4690 (1999)
- [22] P. Steinhardt, L.Wang, I.Zlatev, Phys.Rev. D, Vol. 59,123504
- [23] I. Zlatev, P. Steinhardt, Physical letters B 459 (1999) 570-574
- [24] C. Armendariz-Picon, V. Mukhanov, P.J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. 85, 21, 4438, (2000)
- [25] C. Armendariz-Picon, V. Mukhanov, Phys. Rev. D, 63, 103510
- [26] N. Agarwal e R. Bean, Class.Quant.Grav.**25**,165001 (2008), arXiv:0708.3967.
- [27] A.Vikhlinin et al, arXiv:0812.2720.
- [28] F.N. Lobo arXiv0807.1640 v1, gr-qc
- [29] L. Amendola, Phys. Rev. D **60**, 043501 (1999), arXiv: astro-ph/9904120.
- [30] V. Faraoni e S. Nadeau, Phys.Rev. D **75**, 023501 (2007), arXiv: gr-qc/0612075.
- [31] C.E.M. Batista ; W. Zimdahl, Classical and Quantum Gravity (Print), v. 27, p. 105012, 2010.
- [32] C.E.M. Batista, Júlio Cesar Fabris ; Masaaki Morita. General Relativity and Gravitation, v. 42, p. 839-849, 2010.
- [33] C.E.M. Batista ; W. Zimdahl, arXiv:0912.0998 [astro-ph.CO].
- [34] R. de Putter, E.V. Linder, Astropart. Phys.**28**, 263 (2007).
- [35] S. Capozziello, S. Nojiri, S. D. Odintsov e A. Troisi, Phys. Lett.B **639**, 135 (2006), arXiv: astro-ph/0604431.
- [36] L. Amendola, D. Polarski e S. Tsujikawa, Phys.Rev.Lett. **98**,131302 (2007), arXiv:astro-ph/0603703; Int.J.Mod.Phys.D **16**, 1555 (2007), arXiv:astro-ph/0605384.

- [37] B. McInnes JHEP vol. 98 (2002)029.
- [38] F. Piazza, S. Tsujikawa, JCAP,0407 (2004)004.
- [39] F.S.N. Lobo, Current Advances and Ideas (Research Signpost, Kerala, India)(2009)[arXiv:gr-qc/0807164].
- [40] J.D. Bekenstein, Proc. Sci Po5(JHW2004)012[arXiv:astro-ph/0412652].
- [41] F. Zwicky, Helv. phys.acta 6,(1933)**110**; S. Smith, astrphys.j.83(1936)23;
- [42] M. Szydlowski, A. Krawicc, W. Czaja, Phys. Rev. 72,036221 (2005).
- [43] M. Tegmark et al, astro-ph/0310723.
- [44] J.G. Hao e R. Akhouri, astro-ph/0504130 Int.J. Mod Phys.D18:1039,2009.
- [45] S.H. Hawking, G.F.R. Ellis, **the large scale structure of space time** (Cambridge Univ. Press, 1973);S.M. Carroll, M. Hoffman, M. Trodden, Phys.Rev.D68 (2003)023509, astro-ph/0301273.
- [46] B. McInnes, JHEP 0208 (2002) 029.
- [47] T. Shiromizu, Maeda, e Sasaki, Phys. Rev. D **62**024012
- [48] C. Skordis, D.F. Mota, P.G. Ferreira, C. Boehm, Phys. Rev. Lett., 96(2006)011301[arXiv-astro-ph0505519]
- [49] A. Kamenshchik, U. Moschella, V. Pasquier, phys. Lett. B **511** 265 (2001).
- [50] T. Chiba, T. Okabe, e M. Yamaguchi, Phys. Rev. **D62**, 023511 (2000), astro-ph/9912463.
- [51] M. Roshan, F. Shojai, Phys.Rev.D, vol. 80, 043508, (2009).
- [52] N.D. Birrell e P.C.W. Davies, **Quantum fields in curved space**, Cambridge University Press, Cambridge (1982).
- [53] M. Minamitsuji, Misao Sasaki e David Langlois, Phys. Rev. **D71**,084019 (2005).
- [54] N.E. Mavromatos e V.A. Mitsou, Astropart. Phys. **29**, 442 (2008).
- [55] J.C. Fabris, I.L Shapiro e J.Solá, JCAP **0702**, 016 (2007).

- [56] R. Colistete e J.C. Fabris, *Class. Quant. Grav.***22**,2813 (2005).
- [57] S. Smith, *astrophys.* **83**(1963) 23.
- [58] V. Sahni, Yu.V. Shtanov, *JCAP* 0311014, (2003)[arXiv:astro-ph/0202346]. U. Alam, V. Sahni,astro-ph/ 0209443.
- [59] A. Frolov. Kofman, A.A. Starobinski *Phys. Lett. B* 545, 8, (2002).
- [60] N. Bilic, G.B. Tupper, R. Viollier *Phys. Lett. B*535, 17 (2002). J.S. Bullok, A.V. Kravtsov, D.H. Weinberg, *Astrop. J.* 539,517 (2000). J.C. Fabris, S.V. Goncalves, P.E. de Souza, astro-ph/0207430, V. Gorini, A. Kamenshycik, U. Moschella, astro-ph/0209395.
- [61] R. H. Sanders, *Astrophys. J.*, 480 (1997)492[astro-ph/9612099]
- [62] E.J. Copeland, M. Samie S. Tsujikawa, *Int.J.Mod. Phys. D* **15**, 1753 (2006), arXiv:hep-th/0603057
- [63] L. Perivolaropoulos, *JCAP* **0510** (2005) 001, arXiv:astro-ph/0504582 .
- [64] A.W. Brookfield, C. van de Bruck e L.M.H. Hall, *Phys.Rev. D* **74**, 064028 (2006), arXiv:hep-th/0608015.
- [65] T. P. Sotiriou e V. Faraoni, arXiv:0805.176.
- [66] T. P. Sotiriou, arXiv:0810.5594.
- [67] T. Chiba, *Phys. Lett. B* **575**, 1 (2003).
- [68] S. Capozziello, V.F. Cardone e A. Troisi, *Phys. Rev. D* **71**, 043503 (2005), arXiv:astro-ph/0501426.
- [69] J. Khoury e A. Weltman, *Phys.Rev. Lett.* **93**, 171104 (2004); *Phys.Rev. D* **69**, 044026 (2004).
- [70] W. Hu e I. Sawicki, *Phys. Rev. D* **76**, 064004 (2007), arXiv:0705.1158.
- [71] T. Matos, e L. A. Urena-Lopez, *J.Mod. Phys. D* **13**, 2287 (2004), arXiv:astro-ph/0406194.
- [72] Ch.G. Boehmer, T. Harko e F. S. N. Lobo, *Astropart. Phys.***29**, 386 (2008), arXiv:0709.0046

- [73] L. Järv, P. Kuusk e M. Saal, arXiv:0705.4644.
- [74] W. Zimdahl, D. Pavón e L. P. Chimento, Phys. Lett. B **521**, 133 (2001).
- [75] S. M. Carroll, V. Duvvuri, M. Trodden e M.S. Turner, Phys. Rev. D **70**, 043528 (2004), arXiv:astro-ph/0306438.
- [76] S. Nojiri e S.D. Odintsov, Phys. Lett. B **576**, 5 (2003), arXiv:hep-th/0307071; Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **4**, 115 (2007), arXiv:hep-th/0601213.
- [77] R. Gannouji, D. Polarski, A. Ranquet e A.A. Starobinsky, JCAP **0609**, 016 (2006), arXiv:astro-ph/0606287.
- [78] D. Torres, Phys. Rev. D **66**, 043522 (2002).
- [79] R.C. Caldwell e M. Kamionkowski, arXiv:0903.0866.
- [80] P. Jordan, Z. Physik **157**, 112 (1959).
- [81] R. Durrer e R. Maartens, arXiv: 0811.4132.
- [82] A. D. Dolgov e M. Kawasaki, Phys. Lett. B **573**, 1 (2003).
- [83] A.A. Starobinsky, Phys.Lett. B **91**, 99(1980)
- [84] R. Kerner, Gen. Relativ. Grav. **14**, 453 (1982).
- [85] S.Capozziello e M. Francaviglia, Gen. Relativ. Gravit. **40**, 357 (2008).
- [86] T. Faulkner, M. Tegmark, E.F. Bunn e Y. Mao, Phys.Rev.D **76**, 063505 (2007), arXiv:astro-ph/0612569.
- [87] A. A. Starobinsky, JETP Lett. **86**, 157 (2007), arXiv:0706.2041v2.
- [88] S. Nojiri e S.D. Odintsov, Phys. Lett. B **657**, 238 (2007),arXiv:0707.1941.
- [89] T. Clifton e J.D. Barrow, Phys.Rev.D **73**, 104022 (2006), arXiv:gr-qc/0603116.
- [90] S. Das e N. Banerjee, Phys.Rev.D **78**, 043512 (2008), arXiv:0803.3936.
- [91] L. Amendola, R. Gannouji, D. Polarski e S. Tsujikawa, Phys.Rev.D **75**, 083504 (2007), arXiv:gr-qc/0612180.
- [92] S. Capozziello, M. De Laurentis e V. Faraoni, arXiv:0909.4672.

- [93] S. Capozziello, V.F. Cardone e A. Troisi, JCAP **0608**,001 (2006), arXiv:astro-ph/0602349; Mon.Not.Roy.Astron.Soc.**375**, 1423 (2007), arXiv:astro-ph/0603522.
- [94] R. Catena, M. Pietroni e L. Scarabello, Phys.Rev.D **76**, 084039 (2007), arXiv:astro-ph/0604492.
- [95] S. Carloni, P.K.S. Dunsby, S. Capozziello e A. Troisi, Class. Quant. Grav, **22**, 4839 (2005) arXiv:gr-qc/0410046.
- [96] K. Maeda e Y. Fujii, arXiv:0902.1221.
- [97] S. Capozziello, S. Carloni e A. Troisi, Recent Res.Dev. Astron.Astrophys. **1**, 625 (2003), arXiv:astro-ph/0303041; S.Capozziello, V.F. Cardone, M. Funaro e S. Carloni, Phys. Rev. D **70**, 123501 (2004), arXiv:astro-ph/0410268.
- [98] Ch. Wetterich, Astron.Astrophys. **301**, 321 (1995), arXiv:hep-th/9408025.
- [99] J.-P. Uzan, Phys.Rev.D **59**, 123510 (1999), arXiv:gr-qc/9903004.
- [100] L. Amendola, Phys.Rev.D **62**, 043511 (2000), arXiv:astro-ph/9908023.
- [101] C. Wetterich, Nucl. Phys. B **302**, 668 (1988).
- [102] D. Wes, E.J. Copele, e A.R. Liddle, Ann. N.Y. Acad. Sci. **688**, 647 (1993); E.J. Copele, A.R. Liddle, e D. Wes, Phys.Rev.D **57**, 4686 (1998), arXiv:gr-qc/9711068.
- [103] P.G. Ferreira e M. Joyce, Phys. Rev. D **58**, 023503 (1998).
- [104] G.V. Bicknell, J.Phys. **A7**, 341, 1061 (1974).
- [105] H.J. Schmidt, arXiv:gr-qc/0602017.
- [106] A.B. Batista, J.C. Fabris e R. de Sa Ribeiro, Gen. Relativ. Grav. **33**, 1237 (2001), arXiv:gr-qc/0001055; J.C. Fabris, S.V.B. Gonçalves e R. de Sa Ribeiro, Grav. Cosmol **12**, 49 (2006), arXiv:astro-ph/0510779.
- [107] W. Zimdahl e D. Pavón, Class. Quantum Grav. **24**, 5641 (2007).
- [108] M. Visser, Class. Quant. Grav. **21**, 2603 (2004), arXiv:gr-qc/0309109.
- [109] W. Zimdahl e D. Pavón, Gen. Relativ. Grav. **36**, 1483 (2004), arXiv:gr-qc/0311067.
- [110] R.R. Caldwell, Phys. Lett. B **545**, 23 (2002).

- [111] A.G. Riess *et al.*, *Astrophys.J.* **659**, 98 (2007), arXiv:astro-ph/0611572.
- [112] A.G. Riess, *Astrophys. J.* **607**, 665 (2004).
- [113] R. Colistete Jr. e J.C. Fabris, *Class. Quant. Grav.* **22**, 2813 (2005).
- [114] W. Zimdahl e D. Pavón, *Class. Quantum Grav.* **24**, 5641 (2007).